

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 13

ΠΡΟΩΘΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΥΡΑΥΛΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΗΜΟΧΗΜΑΤΩΝ

Ασκήσεις και Εφαρμογές

βασιζόμενες στην ύλη του ομώνυμου Κεφαλαίου 13 του βιβλίου Ρευστοδυναμικές Μηχανές (ΡΔΜ) του συγγραφέα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Η αρίθμηση ασκήσεων, σχέσεων, σχημάτων και πινάκων αντιστοιχεί στην αρίθμηση στο βιβλίο ΡΔΜ

Εισαγωγικές παρατηρήσεις και παραδοχές.

- 13.1.1Α Υπολογισμός πυραυλικού προωθητικού συστήματος υγρών καυσίμων
- 13.1.2Α Συνθήκες λειτουργίας και ώθηση πυραυλικού ακροφυσίου
- 13.2.2Α Ωθηση και λειτουργικά μεγέθη του πυραυλοκινητήρα SATURN V αποστολής στη Σελήνη
- 13.3.3Α Μεταβολή ώθησης πυραυλοκινητήρα καθ' ύψος
- 13.3.4Α Χαρακτηριστικά στοιχεία πυραυλικών προωθητικών και ο υπολογισμός τους
- 13.3.4Β Υπολογισμός μεγεθών λειτουργίας ακροφυσίου πυραυλοκινητήρα στερεών καυσίμων
- 13.3.6Α Υπολογισμός διαστημικού ηλεκτρομαγνητικού προωστήρα
- 13.4.2Α Επιλογή προωθητικού δορυφόρου αντιπυρικής επισκόπησης
- 13.4.3Α Ικανότητα αύξησης ταχύτητας του προωθητικού συστήματος SATURN
- 13.4.5Α Υπολογισμός πυραυλοκίνητου βλήματος
- 13.4.6Α Υπολογισμός ποσότητας καυσίμου πυραυλοκινητήρα
- 13.5.2Α Επιλογή βαθμίδωσης πυραυλοκίνησης κατόπιν υπολογιστικής σύγκρισης μονοβάθμιδου και διβάθμιδου πυραύλου
- 13.5.2Β Διβάθμιδος πύραυλος εκτοξεύει μεγαλύτερο ωφέλιμο φορτίο από έναν μονοβάθμιδο
- 13.5.2Γ Εύρεση ωφέλιμου φορτίου με βάση τα χαρακτηριστικά προωθητικού συστήματος
- 13.5.2Δ Υπολογισμός ωφέλιμου φορτίου διβάθμιδου πυραύλου
- 13.5.3Α Εύρεση ωφέλιμου φορτίου με βάση τα χαρακτηριστικά προωθητικού συστήματος
- 13.5.5Α Πυραυλικό σύστημα εκτόξευσης σε γήινη τροχιά
- 13.7.3Α Διαστασιολόγηση υβριδικού πυραυλοκινητήρα
- 13.8.2Α Προώθηση διαστημοχήματος (Δ/Ο) ή δορυφόρου (Δ/Φ) με ακροφύσιο ψυχρού αερίου
- 13.8.5Α Προσδιορισμός διαστημικής αποστολής με πυραυλοκίνηση ηλεκτρικής πρόωσης

Εισαγωγικές παρατηρήσεις και παραδοχές.

13.1.1A Υπολογισμός πυραυλικού προωθητικού συστήματος

Το προωθητικό σύστημα ενός πυραύλου εκτόξευσης έχει παροχή μάζας 84 kg/s. Χρησιμοποιεί ως καύσιμα υγροποιημένο οξυγόνο (οξειδωτής, LOX, liquid oxygen) και υγροποιημένο υδρογόνο (LH2, liquid hydrogen), το οποίο παρουσιάζει στην έξοδο του ακροφυσίου ταχύτητα 3.100 m/s. Η διάμετρος εξόδου του ακροφυσίου είναι 1.050 mm. Το ακροφύσιο λειτουργεί υπό πλήρη εκτόνωση στο ύψος των 11,5 km.

Ποια είναι η ώθηση του πυραυλικού ακροφυσίου

(α) στο ύψος των 11,5 km, όπου ο βαθμός απόδοσής του είναι 96% και

(β) στην επιφάνεια του εδάφους, όπου ο βαθμός απόδοσής του είναι 89%.

ΛΥΣΗ: Η πλήρης εκτόνωση στο ύψος των 11,5 km σημαίνει, ότι εκεί η πίεση εξόδου είναι ίση με την πίεση περιβάλλοντος $p_e = p_a$. **Δεδομένα:** Παροχή μάζας $\dot{m} = 84$ kg/s, Ταχύτητα εξόδου $u_e = 3.100$ m/s, Διάμετρος εξόδου ακροφυσίου $D_e = 1.050$ mm = 1,05 m, Ύψος λειτουργίας, (α) $h_1 = 11,5$ km όπου σύμφωνα με τη Standard Atmosphere 1976 (βλ. ΠΙΝΑΚΑ 2.3-1) η πίεση περιβάλλοντος είναι $p_a = 20.984$ Pa και (β) $h_2 = 0$ όπου $p_a = 101.325$ Pa. Ο βαθμός απόδοσης είναι αντίστοιχα στα δύο ύψη (α) $\eta_t = 96\%$ και (β) $\eta_t = 89\%$.

$$F_t = \eta_t \times (\dot{m} u_e + (p_e - p_a) A_e)$$

Η ώθηση υπολογίζεται από τη σχ. (13.1.3)

13.1.2A Συνθήκες λειτουργίας και ώθηση πυραυλικού ακροφυσίου

Στον πυραυλοκινητήρα της πρώτης βαθμίδας ενός συστήματος διαστημικής εκτόξευσης με διάμετρο εξόδου του ακροφυσίου $D_e = 1.140$ mm επικρατούν οι ακόλουθες συνθήκες: Πίεση στασιμότητας $p_t = 32$ bar, δηλ. πίεση στο Θάλαμο Καύσης Θερμοκρασία στασιμότητας $T_t = 2.550$ K, δηλ. θερμοκρασία στον Θ.Κ., Σχετική Μοριακή Μάζα $M_r = 26,2$, δηλ. M_r του προωθητικού, το οποίο είναι αποτέλεσμα της καύσης του μείγματος, οξειδωτή/καυσίμου, Ισεντροπικός εκθέτης $\gamma = 1,31$, δηλ. ο λόγος ισοβαρούς προς την ισόχωρη θερμοχωρητικότητα, Πίεση στην έξοδο του ακροφυσίου $p_e = 22.200$ Pa. Να ευρεθούν:

(α) θερμοκρασία T_e , ταχύτητα u_e , ειδική ενθαλπία h_e , αριθμός Mach M_e στην έξοδο του ακροφυσίου,

(β) η παροχή μάζας $\dot{m}$,

(γ) η ώθηση του ακροφυσίου F_t με την παραδοχή της ιδεώδους εκτόνωσης και της ισεντροπικής παγωμένης ροής από τον Θ.Κ. μέχρι την έξοδο του ακροφυσίου.

Δεδομένα: Εκτός των παραπάνω μεγεθών απαιτείται η γενική σταθερά των αερίων $R_g = 8.314,383$ J/(kmolK).

ΛΥΣΗ: (α) Χρησιμοποιούμε τους τύπους ισεντροπικής ροής, σχ.(13.1.11β), αλλά και σχ.(13.1.4 έως 10):

$$T_e = T_t \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 2550 \times \left(\frac{22200}{32 \times 10^5} \right)^{\frac{1,31-1}{1,31}} = 2550 \times (6,9375 \times 10^{-3})^{0,23664} \quad \textcircled{R}$$

$$T_e = 786,47 \text{ K}$$

13.2.2A Ώθηση και λειτουργικά μεγέθη του πυραυλοκινητήρα SATURN V

Το ένα από τα πέντε ακροφύσια της πρώτης βαθμίδας του μεγαλύτερου στον κόσμο πυραύλου Saturn V, με τον οποίο έγινε η εκτόξευση στη Σελήνη της 17ης αποστολής Apollo, είχε διάμετρο εξόδου 3.700 mm και λόγο διατομής εξόδου / λαιμού 22, ο οποίος αντιστοιχεί σε πλήρη εκτόνωση στο ύψος σχεδιασμού των περίπου 8,8 km. Με προωθητικό το παράγωγο της καύσης υγροποιημένου οξυγόνου (LOX) και του πυραυλικού καυσίμου RP-1 (ένα είδος κηροζίνης), στο θάλαμο καύσης η πίεση ήταν 84 bar και η θερμοκρασία 3.680 K με σχετική μοριακή μάζα $M_r = 23,3$ και ισεντροπικό εκθέτη (λόγος ισοβαρούς προς ισόχωρη θερμοχωρητικότητα) $\gamma = 1,24$. Να υπολογιστεί:

(α) η ώθηση του ακροφυσίου στο ύψος σχεδιασμού και κατά την εκτόξευση με δεδομένο βαθμό απόδοσης $\eta_t = 0,98$ και 0,96 αντίστοιχα και

(β) τα μεγέθη της ροής στο λαιμό και την έξοδο του ακροφυσίου, δηλ. ταχύτητες, πιέσεις, πυκνότητες, θερμοκρασίες, αριθμούς Mach θεωρώντας ότι η ροή είναι “παγωμένη”, δηλ. ότι διατηρεί τις ίδιες θερμοχημικές ιδιότητες από το θάλαμο καύσης μέχρι και την εκροή από το ακροφύσιο.

Δεδομένα: Διάμετρος εξόδου $D_e = 3.700 \text{ mm} = 3,7 \text{ m}$, λόγος εκτόνωσης, δηλ. λόγος εμβαδού επιφάνειας εξόδου / λαιμού, $\varepsilon = 22$, σχετική μοριακή μάζα αερίων $M_r = 23,3$, ισεντροπικός εκθέτης $\gamma = 1,24$, πίεση στασιμότητας (στο θάλαμο καύσης) $p_t = 84 \text{ bar}$, θερμοκρασία στασιμότητας $T_t = 3.680 \text{ K}$, ατμοσφαιρικό ύψος σχεδιασμού $8,8 \text{ km}$.

ΛΥΣΗ: (α) Η ώθηση υπολογίζεται από την σχ.(13.1.3): $F_t = \eta_t \times (\dot{m} \times u_e + (p_e - p_a) \times A_e)$

Στο κανονικό σημείο λειτουργίας και σχεδιασμού του ακροφυσίου η εκτόνωση είναι πλήρης. Εκεί η πίεση εξόδου είναι ίση με τη πίεση περιβάλλοντος στο ύψος σχεδιασμού, $p_e = p_a$ και η ώθηση είναι:

$F_t = \eta_t \times \dot{m} \times u_e$. Η παροχή μάζας υπολογίζεται από την εξίσωση συνέχειας, σχ.(13.1.4):

$$\dot{m} = \dot{m}_e = \dot{m}^* = u^* \times \rho^* \times A^* = a^* \times \rho^* \times A^*$$

13.3.3A Μεταβολή ώθησης πυραυλοκινητήρα καθ' ύψος

Να ευρεθεί κατά πόσο αυξάνεται η ώθηση ενός πυραύλου στο ύψος των 31 km σε σύγκριση με την τιμή της στο έδαφος (0 km), όπου η εκτόνωση είναι πλήρης (ιδεώδης), όταν η πίεση στο θάλαμο καύσης είναι $23,5 \text{ bar}$ και το προωθητικό έχει ισεντροπικό εκθέτη $1,32$.

Δεδομένα: $H = 0 \text{ km}$, $H = 31 \text{ km}$, $p_t = 23,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\gamma = 1,32$.

ΛΥΣΗ: Χρησιμοποιούμε τον συντελεστή ώθησης, σχ. (13.3.9), στη μορφή της σχ.(13.3.12α):

$$C_F = \frac{F_t}{A^* p_t} = \left[\frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right]^{1/2} + \frac{p_e - p_a}{p_t} \frac{A_e}{A^*} \quad \textcircled{R}$$

$$C_F = f(\gamma) f\left(\frac{p_e}{p_t}\right) + \frac{p_e - p_a}{p_t} \varepsilon$$

13.3.4A Χαρακτηριστικά στοιχεία πυραυλικών προωθητικών και ο υπολογισμός τους

Οι θεωρητικές τιμές της χαρακτηριστικής ταχύτητας εξόδου c_t και της ειδικής ώθησης I_{spth} υπολογίζονται από τις σχ.(13.3.14α και 21), αντίστοιχα:

$$c_t = \frac{a_t}{f(\gamma)} \quad \mu\epsilon \quad a_t = \sqrt{\gamma \times R \times T_t} \quad \text{και} \quad f(\gamma) = \gamma \times \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad I_{spth} = \left(\frac{2\gamma \times R \times T_t}{\gamma - 1} \times \frac{1}{g_n^2} \right)^{0,5} \quad \gamma \alpha \quad p_e = p_a \approx 0$$

Η πραγματική τιμή της ειδικής ώθησης είναι κατά την εμπειρία περίπου το 97 έως το 88% ή κατά μέσο

όρο το 93% της θεωρητικής: $I_{sp} \approx 0,93 \times I_{spth}$. Οι αντίστοιχες τιμές του **ΠΙΝΑΚΑ 13.3/1** έχουν υπολογισθεί με ακριβείς θερμοχημικούς υπολογισμούς κατά τους Sutton- Biblarz (2001).

(α) Να υπολογισθούν οι τιμές αυτές με τους παραπάνω τύπους, δηλ. με τη θεώρηση του ιδανικού αερίου, για τα προωθητικά 3 και 8 προς σύγκριση.

(β) Ποιο το συμπέρασμα από τη σύγκριση;

ΛΥΣΗ: (α) **Προωθητικό 3:** Οξυγόνο O_2 –Υδρογόνο H_2 με λόγο μείξης $M_R = 4,02$, $\gamma = 1,26$, $T_t = 2.999 \text{ K}$, $M_r = 10$, $c_t = 2.432 \text{ m/s}$, $I_{sp} = 389,5 \text{ s}$. Η ειδική σταθερά του αερίου προωθητικού 3 κατά τη σχ.(13.1.7) είναι

13.3.4B Υπολογισμός μεγεθών λειτουργίας ακροφυσίου στερεών καυσίμων

Κατά τις πειραματικές δοκιμές ενός πυραυλοκινητήρα στερεών καυσίμων με ακροφύσιο διαμέτρων λαιμού και εξόδου 91 mm και 325 mm, αντίστοιχα, σ' ένα πείραμα διάρκειας λειτουργίας των 47 s μετρώνται τα εξής χαρακτηριστικά του μεγέθ: πίεση στο θάλαμο καύσης (στασιμότητας) 73,5 bar, μέση σταθερή ώθηση 67.850 N και πίεση εξόδου 67.500 Pa. Η αρχική μάζα του πυραυλοκινητήρα μειώνεται από την αρχική τιμή της των 1.525 kg στη τελική των 288 kg.

(α) Κατά την αποτίμηση των αποτελεσμάτων ζητούνται η παροχή μάζας του προωθητικού $\dot{m}$, η χαρακτηριστική ταχύτητα c_t , η ταχύτητα εκροής από το ακροφύσιο u_e , η ενεργός ταχύτητα εξόδου c και η ειδική ώθηση I_{sp} στο έδαφος, όπου εκτελούνται τα πειράματα (επιφάνεια θάλασσας, δηλ. σε ατμοσφαιρικό ύψος $h = 0$).

(β) Ζητείται επίσης να ευρεθούν η c και η I_{sp} στα ύψη των 1,1 και 23,5 km, όπου η πίεση περιβάλλοντος p_a είναι σύμφωνα με τον Πίνακα της Standard Atmosphere 1976 του ΠΙΝΑΚΑ 2.3/1ΡΔΜ $p_a = 88.791$ Pa και $p_a = 3.209,4$ Pa, αντίστοιχα.

Δεδομένα: $D^* = 0,091$ m, $D_e = 0,325$ m, $t_b = 47$ s, $p_t = 7.350.000$ Pa, $p_e = 67.500$ Pa, $F_t = 67.850$ N, $m_A = 1525$ kg, $m_T = 288$ kg, συνθήκες ιδεώδους εκτόνωσης και λειτουργίας του ακροφυσίου.

ΛΥΣΗ: Η παροχή του προωθητικού $\dot{m}$ είναι η καταναλωθείσα μάζα καυσίμου $m_K = m_A - m_T$ στη

$$\dot{m} = \frac{m_K}{t_b} = \frac{1525 - 288}{47} \quad \text{®} \quad \dot{m} = 26,32 \text{ kg/s}$$

διάρκεια καύσης t_b :

13.3.6A Υπολογισμός διαστημικού ηλεκτρομαγνητικού προωστήρα

Ο ηλεκτρομαγνητικός προωστήρας Ξένου (Xe , $M_r = 131,3$) ενός δορυφόρου σε γήινη τροχιά ύψους 500 km παράγει ώθηση 0,01 N για ορισμένο χρονικό διάστημα με σκοπό τη διόρθωση της τροχιάς του. Η ταχύτητα εξόδου του προωθητικού από το στόμιο εκροής (ακροφύσιο) του προωστήρα διαμέτρου 10 cm είναι $u_e = 30.000$ m/s, υπολογισμένη από τα ηλεκτρικά μεγέθη του. Ζητούνται:

(α) Η παροχή προωθητικού στον προωστήρα

(β) Είναι η ροή στην έξοδο του ακροφυσίου υπερηχητική; Γιατί;

(γ) Είναι η ροή στην έξοδο του ακροφυσίου ελεύθερη μοριακή; Γιατί;

ΛΥΣΗ: (α) Δεδομένα: $H = 500$ km, $F_t = 0,01$ N, $D_e = 0,1$ m, $u_e = 30.000$ m/s.

Η παροχή προωθητικού στον προωστήρα με εξισούμενη την πίεση εξόδου με αυτή του περιβάλλοντος

13.4.2A Επιλογή προωθητικού δορυφόρου αντιπυρικής επισκόπησης

Η δεξαμενή προωθητικού ενός μικροδορυφόρου (μικρού Δ/Φ) αντιπυρικής επισκόπησης μάζας 15,5 kg είναι σφαιρική με διάμετρο 175 mm, υπό πίεση 210 bar και θερμοκρασία 24 °C και τροφοδοτεί ένα αυτοφερόμενο πυραυλοκινητήρα ψυχρού αερίου για τη διατήρηση θέσεως του Δ/Φ. Προς επιλογή είναι δύο αδρανή αέρια ως προωθητικά: Ήλιο (He) με σχετική μοριακή μάζα $M_r \approx 4$ και ενεργό ταχύτητα εξόδου $c = 1.772$ m/s και Άζωτο (N_2) με $M_r \approx 28$ και $c = 791$ m/s.

(α) Να επιλεγεί το είδος του προωθητικού με κριτήριο τη μέγιστη συνολική ικανότητα αύξησης ταχύτητας ΔV ,

(β) Η επιλογή να τεκμηριωθεί επίσης με βάση την πυκνότητα ειδικής ώθησης του προωθητικού λαμβάνοντας την πυκνότητα νερού 1000 kg/m³.

Δεδομένα: (α) Μάζα του Δ/Φ $m_A = m = 15,5$ kg, Δεξαμενή: διάμετρος $d_K = 0,175$ m, πίεση $p_K = 210 \cdot 10^5$ Pa, θερμοκρασία $T_K = 273,15 + 24 = 297,15$ K, $M_{rN} = 28,01348$ kg/kmol, $M_{rHe} = 4,002602$ kg/kmol,

$R_g = 8.314,383 \text{ J/(kmol}\cdot\text{K)}$, Ενεργός ταχύτητα εξόδου: Άζωτο $c_N = 791 \text{ m/s}$, Ήλιο $c_{He} = 1.772 \text{ m/s}$, $\rho_N = 1.000 \text{ kg/m}^3$.

ΛΥΣΗ: (α) Η αύξηση της πραγματικής ταχύτητας ΔV υπολογίζεται από την πυραυλική εξίσωση του

$$\Delta V = c \times \ln \frac{m_A}{m_T}$$

Τσιολκόφσκυ με χρήση της ενεργού ταχύτητας, όπως δίνει η σχ.(13.4.16β)

13.4.3Α Ικανότητα αύξησης ταχύτητας του προωθητικού συστήματος SATURN

Ο μεγαλύτερος πύραυλος του κόσμου Saturn V (χρησιμοποιήθηκε στις στελεχωμένες αποστολές Apollo στη Σελήνη) είχε συνολική μάζα κατά την εκτόξευση 2.890 t και την ικανότητα να θέσει σε χαμηλή γήινη κυκλική τροχιά 500 km ένα διαστημόχημα ως ωφέλιμο φορτίο μάζας 120 t . Η μέση πραγματική ειδική ώθηση του συστήματος πρόωσης ήταν 310 s . Να ευρεθεί:

(α) η αύξηση ταχύτητας ΔV , που μπορεί να επιτύχει ο πύραυλος και

(β) το μέρος της ΔV το οφειλόμενο συνολικά στην αεροδυναμική αντίσταση και την επιβράδυνση βαρύτητας.

Δεδομένα: Μάζα εκτόξευσης $m_A = 2,89 \cdot 10^6 \text{ kg}$, μάζα ωφέλιμου φορτίου $m_L = 120.000 \text{ kg}$, ειδική ώθηση $I_{sp} = 310 \text{ s}$, ύψος τροχιάς $h = 500 \text{ km}$.

ΛΥΣΗ: (α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Τσιολκόφσκυ στη μορφή της σχ.(13.4.16β) για πραγματικές

$$\Delta V_{\text{πραγμ}} = \Delta V_{re} = g_n \times I_{sp, re} \times \ln \frac{m_A}{m_T}$$

συνθήκες πτήσης ανόδου προς την τροχιά

13.4.5Α Υπολογισμός πυραυλοκίνητου βλήματος

Ένα πυραυλοκίνητο βλήμα εκτοξεύεται με προωθητικό ειδικής ώθησης 250 s και αρχική μάζα 225 kg , η οποία μειώνεται στα 150 kg μετά από λειτουργία του πυραυλοκινητήρα διάρκειας 3 s .

Να ευρεθούν:

(α) ο λόγος της αρχικής προς την τελική μάζα του πυραύλου m_A/m_T , η παροχή μάζας του προωθητικού $\dot{m}$, η ώθηση F_t , ο λόγος ώθησης προς το βάρος (F/W) ,

(β) η επιτάχυνση του πυραύλου b , η ενεργός ταχύτητα εξόδου c ,

(γ) η συνολική ώθηση I_{tot} , ο λόγος της συνολικής ώθησης προς το βάρος, η αύξηση της ταχύτητάς του ΔV και η μέση επιτάχυνση του πυραύλου.

Δεδομένα: $m_A = 225 \text{ kg}$, $I_{sp} = 250 \text{ s}$, $m_T = 150 \text{ kg}$, $t_b = 3 \text{ s}$,

$$\frac{m_A}{m_T} = \frac{225}{150} = 1,5$$

ΛΥΣΗ: (α) Ο λόγος της αρχικής προς την τελική μάζα του πυραύλου είναι

Η παροχή μάζας του προωθητικού ευρίσκεται με δεδομένο, ότι μετά από λειτουργία του πυραυλοκινητήρα επί 3 s η μάζα του πυραύλου μειώθηκε από 225 σε 150 kg :

13.4.6Α Υπολογισμός ποσότητας καυσίμου πυραυλοκινητήρα

Σχεδιάζεται η εκτόξευση με μονοβάθμιδο πύραυλο ενός δορυφόρου σε χαμηλή γήινη τροχιά, στην οποία πρέπει να εισαχθεί με ταχύτητα 7.650 m/s . Η μάζα του δορυφόρου είναι 90 kg . Ο διαθέσιμος πύραυλος έχει καύσιμο με ειδική ώθηση 365 s και κλάσμα αδρανούς μάζας $0,075$.

(α) Να υπολογιστεί η ποσότητα του απαιτούμενου καυσίμου και η συνολική του μάζα για να εκπληρώσει ο πύραυλος τον αντικειμενικό του σκοπό.

(β) Όμως για να μπορεί να επιτευχθεί η τελική ταχύτητα των 7.650 m/s απαιτείται να αναπτυχθεί πρόσθετη αύξηση ταχύτητας κατά τουλάχιστον 16% για να υπερνικήσει ο πύραυλος τη δύναμη της βαρύτητας και την αεροδυναμική αντίσταση. Σ' αυτή την πραγματική περίπτωση επαρκεί ο πύραυλός μας;

Δεδομένα: (α) Μάζα ωφέλιμου φορτίου $m_L = 90 \text{ kg}$, απαιτούμενη αύξηση ταχύτητας $\Delta V = 7.650 \text{ m/s}$, ειδική ώθηση προωθητικού $I_{sp} = 365 \text{ s}$, κλάσμα αδρανούς μάζας (δομής) $f_{inert} = 0,075$. (β) $\Delta V = 7650 \cdot 1,16 = 8.874 \text{ m/s}$, τα υπόλοιπα όπως στο (α).

$$\Delta V = I_{sp} \times g_n \times \ln \frac{m_A}{m_T}$$

ΛΥΣΗ: (α) Εφαρμόζουμε την πυραυλική εξίσωση του Τσιολκόφσκυ, σχ.(13.4.16β):

Οι επιμέρους μάζες του πυραύλου είναι $m_A = m_\Delta + m_K + m_L$

Από τον ορισμό του κλάσματος αδρανούς μάζας, σχ.(13.4.18α), λαμβάνουμε

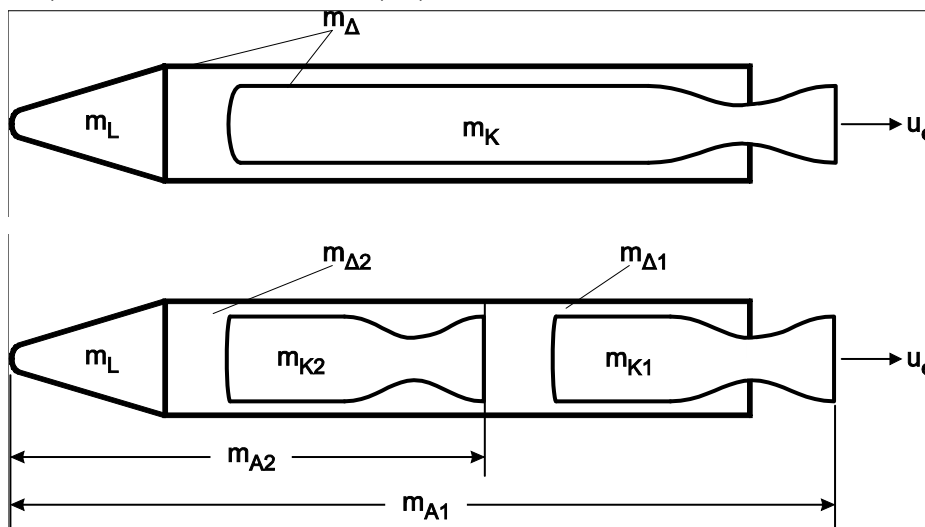
13.5.2Α Επιλογή βαθμίδωσης πυραυλοκινητήρων

Σχεδιάζεται ένα διαστημόχημα προς εκτόξευση υπό συνθήκες "κενού" και έλλειψης βαρύτητας από γήινη χαμηλή τροχιά αναμονής προς ένα πλανητικό ταξίδι, για το οποίο η αύξηση ταχύτητας πρέπει να είναι 6.250 m/s. Το σύστημα εκτόξευσης μαζί με το Δ/Ο ως ωφέλιμο φορτίο έχει μέγιστη μάζα 4.600 kg με προωθητικό ειδικής ώθησης 305 s και διατίθεται σε δύο κατασκευές (Α) ως μονοβάθμιδος πύραυλος με αδρανή μάζα 450 kg, (Β) ως διβάθμιδος πύραυλος με αδρανείς μάζες 1ης και 2ης βαθμίδας 260 kg και 220 kg, αντίστοιχα, και ποσότητα προωθητικού 1ης βαθμίδας το ήμισυ του προωθητικού του μονοβάθμιδου πυραύλου.

(α) Να προσδιοριστεί η μάζα του Δ/Ο στις δύο περιπτώσεις και να επιλεγεί το προσφορότερο εκτοξευτικό σύστημα.

(β) Να ευρεθούν για τις περιπτώσεις (α) και (β) οι συντελεστές αδρανούς μάζας, ωφέλιμου φορτίου και μάζας καυσίμου και να γίνουν σχετικές επαληθεύσεις των αποτελεσμάτων.

Δεδομένα: Έλλειψη ατμόσφαιρας και βαρύτητας επιτρέπουν την εφαρμογή της πυραυλικής εξίσωσης του Τσιολκόφσκυ με $\Delta V = 6.250 \text{ m/s}$ και αρχική μάζα πυραύλου $m_A = 4.600 \text{ kg}$. Για τον μονοβάθμιδο πύραυλο είναι $m_\Delta = 450 \text{ kg}$, $I_{sp} = 305 \text{ s}$, ενώ για τον διβάθμιδο $m_{\Delta,1} = 260 \text{ kg}$ και $m_{\Delta,2} = 220 \text{ kg}$, ειδική ώθηση $I_{sp,1} = I_{sp,2} = 305 \text{ s}$ και $m_{K,1} = m_{K, \text{μονοβ.}}/2$.



ΛΥΣΗ: (α) Η πυραυλική εξίσωση, σχ.(13.4.16),

(Α) για τον μονοβάθμιδο πύραυλο δίνει τελική μάζα m_T :

$$\Delta V = g_n I_{sp} \ln \frac{m_A}{m_T} \quad \textcircled{R} \quad 6250 = g_n \times 305 \times \ln \frac{4600}{m_T} \quad \textcircled{R} \quad \ln \frac{4600}{m_T} = e^{\frac{6250}{305 g_n}} \quad \textcircled{R}$$

$$\frac{4600}{m_T} = 8,0817 \quad \textcircled{R} \quad m_T = 569,2 \text{ kg}$$

13.5.2B Διβάθμιδος πύραυλος εκτοξεύει μεγαλύτερο ωφέλιμο φορτίο από έναν μονοβάθμιδο

Ένας μονοβάθμιδος πύραυλος εκτόξευσης έχει τα εξής χαρακτηριστικά: Ικανότητα παραγωγής αύξησης ταχύτητας $\Delta V = 8.400 \text{ m/s}$, Αδρανής μάζα $m_A = 225 \text{ kg}$, Μάζα προωθητικού (οξειδωτής + καύσιμο) $m_K = 1.540 \text{ kg}$, Ειδική ώθηση $I_{sp} = 462 \text{ s}$.

(α) Να ευρεθεί η μάζα του διαστημοχήματος, το οποίο μπορεί ο πύραυλος να εκτοξεύσει ως ωφέλιμο φορτίο.

(β) Με σκοπό να αυξηθεί η μάζα του παραπάνω ωφέλιμου φορτίου χρησιμοποιείται ένας διβάθμιδος εκτοξευτικός πύραυλος παρομοίου μεγέθους με τον προηγούμενο. Έχει την ίδια ποσότητα του ίδιου προωθητικού και η αποστολή απαιτεί την ίδια συνολική αύξηση ταχύτητας. Επειδή όμως οι δύο βαθμίδες επιφέρουν μια αύξηση της μάζας της δομής και των βοηθητικών μηχανισμών η αδρανής μάζα συνολικά είναι 250 kg κατανεμημένη ομοιόμορφα στις δύο βαθμίδες. Να ευρεθεί η μάζα του ωφέλιμου φορτίου του διβάθμιου πυραύλου και η συνεισφορά της κάθε βαθμίδας στην αύξηση της ταχύτητας.

Δεδομένα: (α) όπως στην εκφώνησης. (β) Χρησιμοποιούμε τους δείκτες 1 και 2 για την 1η και 2η πυραυλική βαθμίδα, αντίστοιχα: $m_{A,1} = 125 \text{ kg}$, $m_{A,2} = 125 \text{ kg}$, $m_{K,1} = 770 \text{ kg}$, $m_{K,2} = 770 \text{ kg}$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 8.400 \text{ m/s}, \quad I_{sp,1} = I_{sp,2} = I_{sp} = 462 \text{ s}$$

ΛΥΣΗ: (α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση πυραύλων του Τσιολκόφσκυ, σχ.(13.4.16) ΡΔΜ, και υπολογίζουμε καταρχάς την αρχική και τελική μάζα του μονοβάθμιδου πυραύλου:

$$m_A = m_A + m_K + m_L = 225 + 1540 + m_L = 1765 + m_L \quad m_T = m_A + m_L = 225 + m_L$$

Με $\Delta V = 8.400 \text{ m/s}$ και $I_{sp} = 462 \text{ s}$ η πυραυλική εξίσωση έχει τη μορφή

13.5.2Γ Εύρεση ωφέλιμου φορτίου με βάση τα χαρακτηριστικά προωθητικού συστήματος

Ένα διβάθμιδο πυραυλικό σύστημα εκτόξευσης κατά το σχεδιασμό του πρέπει να παράγει συνολική αύξηση ταχύτητας 9.880 m/s για να θέσει ένα διαστημόχημα σε τροχιά. Η συνολική μάζα της δεύτερης βαθμίδας, δηλ. δομή και καύσιμα είναι 11.800 kg , από τα οποία 8.900 kg είναι προωθητικό μέσο, ενώ φέρει το Δ/Ο ως ωφέλιμο φορτίο μάζας 2.020 kg . Η μάζα της δομής της πρώτης βαθμίδας είναι 8.000 kg . Στην πρώτη βαθμίδα το σύστημα πρόωσης έχει ειδική ώθηση 345 s και στη δεύτερη βαθμίδα 410 s . Να υπολογισθούν

(α) η συνολική αρχική μάζα του πυραύλου εκτόξευσης,

(β) η μάζα προωθητικού της πρώτης βαθμίδας, ώστε να επιτύχει ο πύραυλος τα 9880 m/s και

(γ) να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με τον υπολογισμό της ΔV από τη σχ.(13.5.8) ΡΔΜ

$$\Delta V = - \sum_{i=1}^{N=2} I_{sp,i} \times g_n \times \ln(f_{A,i} + (1 - f_{A,i})f_{L,i})$$

Δεδομένα: Διβάθμιδο σύστημα με ωφέλιμο φορτίο $m_L = 2.020 \text{ kg}$, $m_{A,2} + m_{K,2} = 11.800 \text{ kg}$, $m_{K,2} = 8.900 \text{ kg}$, $m_{A,1} = 8.000 \text{ kg}$, $I_{sp,1} = 345 \text{ s}$, $I_{sp,2} = 410 \text{ s}$, $\Delta V = 9.880 \text{ m/s}$.

ΛΥΣΗ: (α) Η αύξηση ταχύτητας της 2ης βαθμίδας υπολογίζεται από την εξίσωση του Τσιολκόφσκι στη

μορφή της σχ.(13.4.16)
$$\Delta V_2 = I_{sp,2} \times g_n \times \ln \frac{m_{A,2}}{m_{T,2}}$$
. Η αρχική μάζα της 2ης βαθμίδας αποτελείται από τη

13.5.2Δ Υπολογισμός ωφέλιμου φορτίου διβάθμιδου πυραύλου

Επανερχόμαστε στον μονοβάθμιδο πύραυλο της ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ 13.4.6Α, ο οποίος για να εκτοξεύσει υπό πραγματικές συνθήκες (περίπτωση β) ένα Δ/Ο μάζας 90 kg έπρεπε να διαθέσει ποσότητα προωθητικού 8.654,6 kg με ειδική ώθηση 365 s. Η ταχύτητα εισαγωγής του Δ/Ο στην τροχιά του ήταν 7.650 m/s και η απαιτούμενη αύξηση ταχύτητας του πυραύλου κατά 16% μεγαλύτερη, δηλ. $\Delta V = 1,16 \cdot 7650 = 8.874$ m/s. Ενδιαφερόμαστε τώρα να εκτοξεύσουμε υπό τις ίδιες συνθήκες ταχυτήτων και ποσότητας καυσίμων ένα μεγαλύτερο Δ/Ο επανασχεδιάζοντας τον πύραυλο με δύο βαθμίδες. Ως κατασκευαστική συνέπεια της διβάθμιδης κατασκευής προκύπτει αύξηση της μάζας δομής του πυραύλου, δηλ. της αδρανούς μάζας του, με αποτέλεσμα το κλάσμα αδρανούς μάζας να είναι 0,08.

(α) Ποιο είναι το ωφέλιμο φορτίο του διβάθμιδου πυραύλου, υπό την απλουστευμένη παραδοχή, ότι η πρώτη βαθμίδα παράγει το 30% της αύξησης ταχύτητας;

(β) Να ευρεθούν οι πυραυλικές μάζες καυσίμου και δομής.

(γ) Με σκοπό να εισάγουμε ένα Δ/Ο μάζας 100 kg σε διαπλανητική τροχιά μετατρέπουμε τον διβάθμιδο πύραυλο σε τριβάθμιδο διατηρώντας την πρώτη βαθμίδα ως έχει, ενώ στις δύο άλλες βαθμίδες κατανέμουμε τις μάζες δομής και καυσίμων σε αναλογία 2:1 στη δεύτερη και τρίτη, αντίστοιχα. Είναι δυνατόν μ' αυτό τον τρόπο να επιτύχουμε την ταχύτητα εκφυγής των 11,2 km/s από τη Γη;

Δεδομένα: (α), (β) Μάζα καυσίμου $m_K = m_{K,1} + m_{K,2} = 8.654,6$ kg, Ειδική ώθηση $I_{sp} = I_{sp,1} = I_{sp,2} = 365$ s, Κλάσμα αδρανούς μάζας $f_{\Delta} = f_{\Delta,1} = f_{\Delta,2} = 0,08$, Αύξηση ταχύτητας $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0,3 \cdot \Delta V + 0,7 \cdot \Delta V = 8.874$ m/s. (γ) Ωφέλιμο φορτίο $m_L = 100$ kg, $\Delta V > 11.200$ m/s; $m_{\Delta,2} = 2m_{\Delta,3}$, $m_{K,2} = 2m_{K,3}$.

ΛΥΣΗ (α) Με την πυραυλική εξίσωση του Τσιολκόφσκι (κατ' αναλογία προς την ΕΦΑΡΜΟΓΗ 13.4.6) έχουμε με $m_{A,i}$ την αρχική μάζα και $m_{T,i}$ την τελική μάζα της κάθε βαθμίδας

$$u_{e,1} = I_{sp,1} g_n = 365 \times 9,80665 = 3.579,43 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad u_{e,2} = I_{sp,2} g_n = 365 \times 9,80665 = 3.579,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

13.5.5Α Πυραυλικό σύστημα εκτόξευσης σε γήινη τροχιά

Με τις τιμές των ΔV της Παραγράφου 13.5.5 ΡΔΜ μπορούν να υπολογιστούν οι ποσότητες καυσίμου για τις εξής περιπτώσεις:

(α) Για να μεταβεί ένας δορυφόρος μάζας 900 kg από γήινη τροχιά αναμονής με κλίση 30° σε γεωσύγχρονη τροχιά με προωθητικό ειδικής ώθησης $I_{sp} = 280$ s.

(β) Για να διατηρήσει ο δορυφόρος Intelsat V μάζας 4.500 kg τη γεωσύγχρονη τροχιά του από βορρά προς νότο με προωθητικό $I_{sp} = 270$ s.

(γ) Για να εκτοξευτεί ένα πυραυλικό σύστημα συνολικής μάζας 410 t με $I_{sp} = 380$ s για να θέσει ένα Δ/Ο σε γήινη τροχιά.

Δεδομένα: Από την εκφώνηση και τα στοιχεία της παραγράφου 13.5.5 έχουμε: (α) $m_T = 900$ kg, $\Delta V = 4.200$ m/s, $I_{sp} = 280$ s (β) $m_T = 4.500$ kg, $\Delta V = 348$ m/s, $I_{sp} = 270$ s (γ) $m_A = 410.000$ kg, $\Delta V = 9.400$ m/s, $I_{sp} = 380$ s.

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζεται η πυραυλική εξίσωση του Τσιολκόφσκι στην αρχική της μορφή, σχ.(13.4.1) ή αμεσότερα οι σχ.(13.4.13 και 14), οι οποίες δίνουν την ποσότητα του προωθητικού:

13.7.3Α Διαστασιολόγηση υβριδικού πυραυλοκινητήρα

Κατά τον σχεδιασμό ενός υβριδικού πυραυλοκινητήρα (με προωθητικό μείγμα υγρού – στερεού καυσίμου)* προέκυψαν τα εξής στοιχεία διαστασιολόγησης, ορισμένα από τα οποία μπορούμε να επαληθεύσουμε με δικό μας τρόπο: Ο πυραυλοκινητήρας προορίζεται να χρησιμοποιηθεί ως πρώτη βαθμίδα ενός διβάθμιδου διαστημοχήματος (Δ/Ο), το οποίο πρέπει να κινηθεί από μια ΧΓΤ (χαμηλή γήινη τροχιά, LEO, low earth orbit) σε κυκλική τροχιά ύψους 5.000 km μέσω ελλειπτικής μεταφοράς Hohmann (βλ. ΑΕΡΟΔΙΑΣΤΗΜΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ του συγγραφέα). Κατόπιν με τη δεύτερη βαθμίδα ενός ιοντικού κινητήρα το Δ/Ο πρόκειται να κινηθεί με σπειροειδές ίχνος ανόδου σε ΓΣΤ (γεωσύγχρονη τροχιά, GEO, geosynchronous earth orbit). Η συνολική μάζα του Δ/Ο είναι 12.000 kg με ωφέλιμο φορτίο της πρώτης βαθμίδας 4.914 kg αποτελούμενο από τη δεύτερη βαθμίδα, δηλ. το τελικό ωφέλιμο φορτίο 3.387 kg και τη μάζα του ιοντικού κινητήρα 1.527 kg (= 4.914 – 3.387). Η ακριβώς απαιτούμενη αύξηση ταχύτητας είναι $\Delta V = 1.721 \text{ m/s}$, την οποία όμως προσαυξάνουμε κατά 10% για λόγους ασφαλείας, δηλ. έχουμε $\Delta V_{\text{σχεδιασμού}} = 1.893 \text{ m/s}$.

Ζητείται να ευρεθεί η απαιτούμενη ποσότητα του προωθητικού (οξειδωτή + στερεού καυσίμου), η πίεση τροφοδότησης του οξειδωτικού και η αδρανής μάζα του υβριδικού Δ/Ο.

Δεδομένα: * Επιλέγουμε ως προωθητικό το μείγμα καύσεως LOX / HTPB με λόγο μείξης οξειδωτή / καυσίμου $O / F = 2,1$, όπου κατά το **ΣΧΗΜΑ 13.7/18 ΡΔΜ** η ειδική ώθηση μεγιστοποιείται. Θεωρούμε τη ροή από το λαιμό του ακροφυσίου και μετά ως θερμοδυναμικά πλήρως παγωμένη (σταθερές ιδιότητες). Χρησιμοποιούμε τις πολυωνυμικές εξισώσεις των **ΣΧΗΜΑΤΩΝ 13.7/17, 19 και 20**, $T_t (O/F)$, $M_r (O/F)$, $\gamma (O/F)$, και λαμβάνουμε: • Σχετική μοριακή μάζα $M_r = 22,837 \text{ kg/kmol}$ • Θερμοκρασία καύσης (στασιμότητας) $T_t = 3.593,04 \text{ K}$ • Ισεντροπικός εκθέτης $\gamma = 1,2313$, Πυκνότητα του LOX $\rho = 1.142 \text{ kg/m}^3$ (LOX : liquid oxygen $\rightarrow$ υγροποιημένο οξυγόνο)

ΛΥΣΗ: Χαρακτηριστική ταχύτητα εξόδου c_t , σχ.(13.3.23) ΡΔΜ, με την παραδοχή του συντελεστή απόδοσης καύσης $\eta_K = 1,0$ για τη θερμοδυναμικά παγωμένη ροή.

$$c_t = \eta_K \times \sqrt{\frac{R \times T_t}{\gamma}} \times \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2 - 2\gamma}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{R_g}{M_r} \quad R = \frac{8314,383}{22,837} = 364,075 \frac{J}{kgK}, \quad c_t = 1.747,4 \text{ m/s}$$

13.8.2Α Προώθηση Δ/Ο με ακροφύσιο ψυχρού αερίου

Για ένα διαστημόχημα μας ζητείται να σχεδιάσουμε το σύστημα πρόωσης ψυχρού αερίου με προωθητικό αέριο Ήλιον (He) αποθηκευμένο υπό πίεση 200 bar και θερμοκρασία 15 °C. Καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του Δ/Ο η αναγκαία ολική ώθηση είναι 4.800 Ns και η ελάχιστη στιγμιαία ώθηση (ελάχιστο ωθητικό bit) $F_{min} = 0,005 \text{ Ns}$. Επιλέγεται λόγος εκτόνωσης $A_e / A^* = 100$ και θερμοκρασία στο θάλαμο στασιμότητας 40 °C. Το διαστημόχημα πρέπει να έχει δυνατότητα τριαξονικής ευστάθειας, δηλ. να εκτελεί μεταφορικές και περιστροφικές κινήσεις σε σχέση με τους τρεις άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Ως ελάχιστος χρόνος αντίδρασης της βαλβίδας ρύθμισης της παροχής t_R (response time), για να παράγει το ακροφύσιο την απαραίτητη ώθηση, θεωρείται το χρονικό διάστημα των 20 ms (0,02 s).

Ειδικότερα να υπολογισθούν: Η απαιτούμενη ώθηση F_t σε σχέση με την ελάχιστη στιγμιαία ώθηση F_{min} , ο αριθμός των απαιτούμενων ακροφυσίων, η πίεση εξόδου ακροφυσίου, η ειδική ώθηση ως το ~ 90 % της θεωρητικής τιμής της, η απαιτούμενη μάζα καυσίμου και τελικά η εσωτερική διάμετρος της δεξαμενής προωθητικού. Να ληφθούν: γενική σταθερά αερίων $R_g = 8.314,383 \text{ J/(kmolK)}$, σχετική μοριακή μάζα ηλίου $M_r = 4,0026$, $\tilde{a}_{\text{He}} = 1,659$, $T_n = 273,15 \text{ K}$, $g_n = 9,80655 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ: Ο χρόνος αντίδρασης της βαλβίδας ρύθμισης της παροχής του προωθητικού - και κατά συνέπεια της ώθησης - καθορίζει την τιμή της απαιτούμενης ώθησης F_t σε σχέση με την ελάχιστη στιγμιαία ώθηση

$$F_t = \frac{F_{min}}{t_R} = \frac{0,005 \text{ Ns}}{20 \text{ ms}} = \frac{0,005}{0,02} = 0,25 \text{ N}$$

του συστήματος:

. Πρόκειται για μια τιμή εφικτή από

13.8.5A Προσδιορισμός διαστημικής αποστολής με χρήση ηλεκτρικής πρόωσης

Ζητείται να επιλέξουμε τον ηλεκτρικό πυραυλοκινητήρα παραγωγής **ηλεκτρικής πρόωσης** με σκοπό τη μεταφορά ενός διαστημοχήματος (Δ/Ο) από γήινη τροχιά ύψους 5.000 km σε γεωσύγχρονη τροχιά ύψους στα 35.786 km (≈ 35.800 km) μέσω σπειροειδούς τροχιάς μεταφοράς μεγάλης διάρκειας. Απαιτείται συνολική αύξηση ταχύτητας $\Delta V = 4.360$ m/s με ασφάλεια 5% για διάρκεια λειτουργίας του κινητήρα $\tau = 165$ d = 14.255.588 s (αστρικά s!) ή $\sim 5,5$ μήνες. Το ωφέλιμο φορτίο είναι $m_L = 3.400$ kg και η αρχική μάζα του Δ/Ο στην τροχιά των 5.000 km $m_A = 4.900$ kg. Ο προς επιλογή προωστήρας είναι ιοντικός, δηλ. με προωθητικό ιοντισμένο αδρανές μονατομικό αέριο Ξένο (Xe, $M_r = 131,3$), και έχει χαρακτηριστικά: βαθμός απόδοσης $\eta_T = 0,65$, ειδική μάζα ανά μονάδα ισχύος $\beta = 0,022$ kg/W, ειδική ισχύς ανά μονάδα μάζας $\alpha = 1/\beta = 45$ W/kg. Είναι επίσης η μάζα πρωτονίου και το φορτίο ηλεκτρονίου $m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ C.

Ειδικότερα να υπολογιστούν τελικά η απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύς του κινητήρα και η επιφάνεια φωτοβολταϊκών συλλεκτών του Δ/Ο που τη παράγουν.

Μέθοδος σχεδιασμού: Ο σχεδιασμός του ηλεκτρικού πυραυλοκινητήρα βασίζεται στη θεωρία των παραγράφων 13.8.4 και 5. PDM και η αντίστοιχη μεθοδολογία έχει ως εξής: Ηλεκτρικοί πυραυλοκινητήρες παράγουν μικρή ώθηση F_t και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποδοτικά για διαστημικές πτήσεις διαστημοχημάτων μεγάλης χρονικής διάρκειας. Ο λόγος είναι, ότι απαιτούν σχετικά μικρή μάζα προωθητικού m_K ως αποτέλεσμα της υψηλής ειδικής ώθησης I_{sp} προερχόμενης από την υψηλή ταχύτητα εκροής του ακροφυσίου u_e , η οποία αποτελεί χαρακτηριστικό πλεονέκτημα των ηλεκτρικών προωστήρων. Η μικρή ώθηση επιβάλλει τη χρησιμοποίησή της σε διαστημικά τμήματα της τροχιάς του Δ/Ο, δηλ. σε περιβάλλον πολύ μικρών πιέσεων και συνεπώς μικρών πυκνοτήτων του 'διαστημικού κενού'.

Μία τυπική περίπτωση διαστημικής γήινης τροχιάς είναι η μετάβαση του Δ/Ο ή του δορυφόρου (Δ/Φ) από μια τροχιά χαμηλού ύψους (Χαμηλή Γήινη Τροχιά, ΧΓΤ) με αρχική μάζα m_A σε μια γεωσύγχρονη τροχιά (Γεωσύγχρονη Γήινη Τροχιά, ΓΓΤ) με τελική μάζα m_T . Πρόκειται για μια "οιονεί τελευταία βαθμίδα" του

συνολικού συστήματος, για την οποία ισχύει η πυραυλική εξίσωση, σχ.(13.4.10):

$$\frac{m_T}{m_A} = e^{-\frac{\Delta V}{u_e}} \quad (1),$$

που δίνει την απαιτούμενη μάζα καυσίμου

$$m_K = m_A - m_T = m_A \left(1 - \frac{m_T}{m_A} \right) = m_A \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{u_e}} \right) \quad (2) \quad \text{Για να μπορεί να επιτευχθεί η}$$

απαιτούμενη αύξηση ταχύτητας ΔV το καύσιμο καταναλώνεται κατά τον χρόνο διάρκειας της ώθησης τ , ο οποίος μπορεί να είναι μέχρι και ίσος με τη διάρκεια του ταξιδιού, αν η μετάβαση έχει προγραμματισθεί να πραγματοποιηθεί με αδιάλειπτη λειτουργία του πυραυλοκινητήρα. Σε περίπτωση που κατά τον χρόνο τ η ώθηση και η ταχύτητα εξόδου του ακροφυσίου είναι σταθερές, τότε η παροχή μάζας (δηλ. η κατανάλωση)

καυσίμου είναι

$$\dot{m}_K = \frac{m_K}{\delta} \quad (3) \quad \text{Ο προωστήρας με τον ηλεκτρικό επιταχυντή του έχει}$$

βαθμό απόδοσης η_T , που χαρακτηρίζει τη μετατροπή της ηλεκτρικής ισχύος του P_H σε ισχύ ώθησης, δηλ. ισχύ της ελεύθερης εκροής του στο ακροφύσιο P_e :

$$\eta_T = \frac{P_e}{P_H} \quad \rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2} \dot{m}_K u_e^2 = \frac{1}{2} F_t u_e \quad (4).$$

Αρα αν έχει προσδιοριστεί η απαίτηση σε ισχύ ώθησης του Δ/Ο P_e η απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύς είναι

$$P_H = \frac{1}{2\eta_T} \times \dot{n}_K \times u_e^2 \quad (5)$$

Η "δομική μάζα" m_Δ ενός ηλεκτρικού προωστήρα εξαρτάται από τον τύπο του και δίνεται με τη βοήθεια του εμπειρικού συντελεστή β , τον οποίο καλούμε "ειδική μάζα του προωθητικού συστήματος β " σε kg/W , και δίνεται από τον κατασκευαστή ή από στατιστικά στοιχεία της "αγοράς". Εναλλακτικά προς το β χρησιμοποιείται επίσης η "ειδική ισχύς του προωστήρα α " σε W/kg . Οπότε η μάζα του προωστήρα (χωρίς

$$m_\Delta = \beta P_H = \frac{P_H}{\alpha} = \frac{\beta}{2\eta_T} u_e^2 \frac{m_K}{\tau} = \frac{\beta}{2\eta_T} \times u_e^2 \times \dot{n}_K \quad (6)$$

το καύσιμο!) είναι

σε $(\text{kg/W}) \cdot W = \text{kg}$, και περιλαμβάνει επίσης τη δεξαμενή καυσίμου και το σύστημα στερέωσης του προωστήρα. Η μάζα του ωφέλιμου φορτίου είναι η διαφορά της τελικής μάζας του Δ/O και της μάζας της

$$m_L = m_T - m_\Delta = m_T - m_K \times \frac{\beta \times u_e^2}{2\tau \times \eta_T}$$

δομής του

(7). Μετά από διαίρεση με την αρχική μάζα του Δ/O , με $m_K = m_A - m_T$ και με χρήση της πυραυλικής εξίσωσης προκύπτει

$$\frac{m_L}{m_A} = \frac{m_T}{m_A} - \frac{m_A - m_T}{m_A} \frac{\beta u_e^2}{2\tau \eta_T} \quad \textcircled{R} \quad \frac{m_L}{m_A} = e^{-\frac{\Delta V}{u_e}} - \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{u_e}}\right) \times \frac{\beta \times u_e^2}{2\tau \times \eta_T} \quad (8)$$

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα του ωφέλιμου φορτίου ως προς την αρχική μάζα του Δ/O μειώνεται είτε για πολύ χαμηλές είτε για υψηλές ταχύτητες u_e , όταν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Και μάλιστα για πολύ μεγάλες τιμές της u_e γίνεται αρνητικό. Ενδιάμεσα υπάρχει λοιπόν μια τιμή της u_e , για την οποία το κλάσμα μεγιστοποιείται και μπορεί να ευρεθεί με επαναληπτικό υπολογισμό (αφού η αναλυτική αναζήτηση του μέγιστου μέσω της παραγώγισης της σχ.(8) ως προς u_e δεν φαίνεται εφικτή!). Αν το κλάσμα μάζας του ωφέλιμου φορτίου είναι δεδομένο, τότε πρέπει να αναζητηθεί ο ηλεκτρικός προωστήρας με κατάλληλο συνδυασμό των β , η_T και u_e , ώστε να επιτύχει το απαιτούμενο ΔV στο δεδομένο χρόνο λειτουργίας της ώθησης τ .

ΛΥΣΗ: Συνυπολογίζουμε τον συντελεστή ασφαλείας 5% με αντίστοιχη προσαύξηση της απαιτούμενης αύξησης ταχύτητας σε

$$\Delta V = 1,05 \times 4360 = 4578 \text{ m/s}$$

$$\frac{m_L}{m_A} = \frac{3400}{4900} = 0,6939$$

Το κλάσμα μάζας του ωφέλιμου φορτίου είναι
