

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΔΙΑΠΛΑΝΗΤΙΚΑ ΤΑΞΙΔΙΑ ΚΑΙ Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.3.7 Σχεδιασμός αποστολής στην Αφροδίτη.

Κατά την αποστολή τηλεπισκόπησης της Αφροδίτης το Δ/Ο πρέπει να έχει μάζα 280 kg στην κυκλική τροχιά αναμονής ύψους 670 km γύρω από τον πλανήτη, αφού προηγουμένως κατανάλωσε την απαιτούμενη ποσότητα του προωθητικού με ειδική ώθηση 290 s.

Να σχεδιαστεί η αποστολή με ελλειπτικό ίχνος μετάβασης κατά Χόμαν, η οποία ξεκινάει από τροχιά αναμονής περί τη Γη ύψους 330 km, και ειδικότερα να υπολογιστεί η διάρκεια της μετάβασης του Δ/Ο από τη Γη στην Αφροδίτη και η αναλωθείσα μάζα προωθητικού.

Να ληφθούν ως δεδομένα τα φυσικά χαρακτηριστικά των πλανητών και του Ήλιου από τους πίνακες του ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ.

Δεδομένα: Δ/Ο : $h_{TAE} = 330 \text{ km}$, $h_{TAS} = 670 \text{ km}$, $m_{TAS} = 280 \text{ kg}$, $I_{sp} = 290 \text{ s}$.

Από τον ΠΙΝΑΚΑ Π.3/3 τα χαρακτηριστικά των πλανητών και Ήλιου είναι:

Πλανήτης αναχώρησης: ΓΗ: $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $r_E = 149598023 \text{ km}$

Πλανήτης-στόχος: ΑΦΡΟΔΙΤΗ: $\mu_S = 325700 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_S = 6052 \text{ km}$, $r_S = 108208601 \text{ km}$

ΗΛΙΟΣ : $\mu_H = 1,32712428 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$

Λύση: Ο σχεδιασμός της αποστολής αρχίζει με τον υπολογισμό του ίχνους μετάβασης κατά Hohmann στη Φάση Β, η οποία αναλύθηκε στην παράγραφο 9.3.3.

Οι μεγάλοι ημιάξονες των τροχιών της Γης, Αφροδίτης και της τροχιάς μεταφοράς σύμφωνα με τη σχ.(9.3.10) και τις τιμές του ΠΙΝΑΚΑ 9.3/1 είναι:

$$\alpha_E \approx r_E \rightarrow \alpha_E = 149598023 \text{ km}$$

$$\alpha_S \approx r_S \rightarrow \alpha_S = 108208601 \text{ km}$$

$$\alpha_M = \frac{r_E + r_S}{2} = \frac{149598023 + 108208601}{2} \rightarrow \alpha_M = 128903312 \text{ km}$$

Η ειδική ενέργεια των δύο πλανητικών τροχιών από τη σχ.(9.3.3) είναι

Οι τροχιακές ταχύτητες των πλανητών υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχ.(9.3.6α και 20)

Καθώς το Δ/Ο κινείται γύρω από τη Γη στην τροχιά αναμονής, έχει το ίδιο επίσης την ηλιοκεντρική ταχύτητα $V_{AOE} = V_E$.

Η υπερβολική ταχύτητα εκφυγής είναι κατά τη σχ.(9.3.26)

$$V_{hE} = 11,145 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Προηγούμενα στη γήινη τροχιά αναμονής το Δ/Ο έχει την ταχύτητα, σχ.(9.3.29α)

Άρα ο αυτοφερόμενος πυραυλοκινητήρας πρέπει να προσδώσει στο Δ/Ο την ταχύτητα, σχ.(9.3.30α), για να αυξήσει τη V_{TAE} σε V_{HE} και να εισέλθει στο υπερβολικό ίχνος αναχώρησης

$$\Delta V_E = |V_{HE} - V_{TAE}| = |11,145 - 7,7085| \rightarrow \Delta V_E = 3,4365 \frac{km}{s}$$

και έτσι να ολοκληρωθεί η Φάση Α.

Κατά τη Φάση Γ της προσέγγισης στον πλανήτη-στόχο Αφροδίτη το Δ/Ο έχει μηχανική ενέργεια κατά τη σχ.(9.3.32) στο όριο της σφαίρας επιρροής

.....

Η συνολική απαιτούμενη μάζα προωθητικού είναι

$$m_K = m_{K_{TAE}} + m_{K_{TAS}} = 2023,34 + 581,73 \rightarrow m_K = 2605,07 \text{ kg}$$

Η διάρκεια του ταξιδιού από τη Γη στην Αφροδίτη είναι πρακτικά η ημιπερίοδος της ελλειπτικής τροχιάς μετάβασης κατά τις σχ.(4.2.21α και 26α)

$$T_M = \pi \sqrt{\frac{a_M^3}{\mu_H}} = \pi \sqrt{\frac{(128903312)^3}{1,32712428 \cdot 10^{11}}} \rightarrow T_{MT} = 12620896,04 \text{ s} \approx 146,1 \text{ d}$$

Ένα βασικό στοιχείο για την υλοποίηση της αποστολής είναι ο χρονισμός της εκτόξευσης, δηλ. πότε παρουσιάζεται το "παράθυρο εκτόξευσης". Αποτελεί αντικείμενο του υποκεφαλαίου 9.4 με ειδική αναφορά στην Αφροδίτη στην παράγραφο 9.4.3 και στην **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.4.3Γ**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.4.1 Ταξίδι διαστημοχήματος από τη Γη στον Άρη "μετ' επιστροφής".

Για το ταξίδι ενός διαστημοχήματος από τη Γη στον Άρη "μετ' επιστροφής" με ελλειπτικό ίχνος (1) η εκκίνηση σχεδιάζεται να γίνει από το περιήλιο της γήινης τροχιάς και η άφιξη στην αρειανή τροχιά, όταν η επιβατική ακτίνα, δηλ. η ευθεία Δ/Ο - Ηλίου, έχει σαρώσει από το περιήλιο γωνία (α) 120° και (β) 145°.

(α) Να υπολογισθούν οι αναγκαίες μεταβολές ταχύτητας και ο χρόνος πτήσης για τις δυο αυτές περιπτώσεις μετάβασης του Δ/Ο στον Άρη.

Το ταξίδι της επιστροφής στη Γη πραγματοποιείται επίσης με ελλειπτικό ίχνος (2) με την εκκίνηση του Δ/Ο από τον Άρη στο αφήλιο της τροχιάς του και άφιξη στη Γη, όταν η επιβατική ακτίνα έχει σαρώσει γωνία (α) 30°, (β) 85° και (γ) 130° από το αφήλιο. Οι τροχιές των πλανητών θεωρούνται κυκλικές και ομοεπίπεδες και αγνοούνται οι σφαίρες επιρροής τους.

(β) Να υπολογισθούν οι απαιτούμενες μεταβολές ταχύτητας και οι χρόνοι πτήσης.

Δεδομένα: Τα αναγκαία για τον σχεδιασμό δεδομένα σύμφωνα με τα στοιχεία του παρόντος κεφαλαίου είναι:

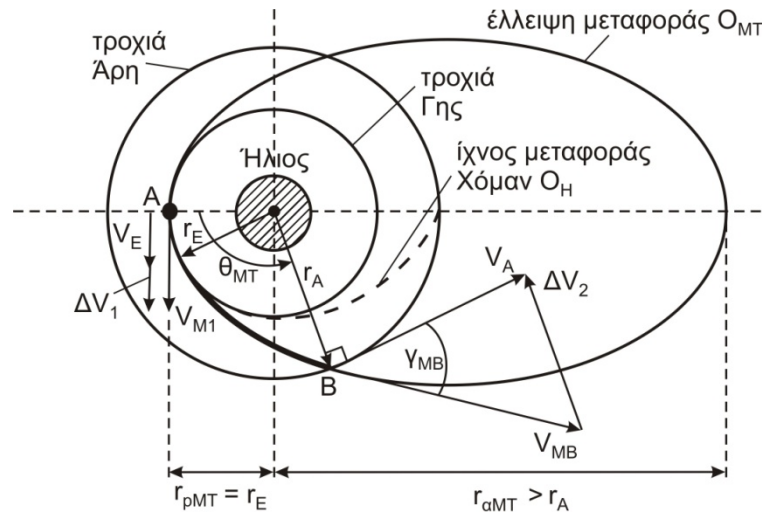
ΓΗ: ακτίνα $R_E = 6378,14 \text{ km}$, βαρυτική παράμετρος $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, απόσταση από τον Ηλιο $r_E = 149598023 \text{ km}$.

ΑΡΗΣ: $R_A = 3397,2 \text{ km}$, $\mu_A = 43050 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $r_A = 227939186 \text{ km}$

ΗΛΙΟΣ: $\mu_H = 1,32712428 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$

Αύση: (1) Η μετάβαση του Δ/Ο από τη γήινη στην αρειανή τροχιά σχεδιάζεται σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο και σκιαγραφείται στο σκαρίφημα, στο **ΣΧΗΜΑ Ε9.4.1/1** το οποίο βασίζεται στο **ΣΧΗΜΑ 8.3/1** για τη διατροχιακή μετάβαση σε σύντομο χρόνο της παραγράφου 8.3.1. Με δεδομένο το λόγο των ακτίνων τροχιάς ρ , σχ. (8.3.15β),

.....



ΣΧΗΜΑ Ε9.4.1/1 Διατροχιακή μετάβαση του Δ/Ο από τη Γη στον Αρη με ελλειπτικό ίχνος σε συντομότερο χρόνο από τη μετάβαση κατά Χόμαν. Η αναχώρηση γίνεται εφαιπτομενικά στο περιήλιο και η άφιξη στο σημείο Β μετά από σάρωση γωνίας θ_M , που είναι η αντίστοιχη αληθής ανωμαλία της (ιδεατής) έλλειψης μεταφοράς.

υπολογίζουμε από τη σχ.(8.3.15α) την εκκεντρότητα της έλλειψης μεταφοράς e_M για την πρώτη τιμή της αληθούς ανωμαλίας θ_M , η οποία αντιστοιχεί στη δεδομένη των 120° , με εκκίνηση του Δ/Ο από το περιήλιο:

(1α) $\theta_{MT} = 120^\circ$

$$e_{MT} = \frac{\rho_1 - 1}{\cos \theta_{MT} - \rho_1} = \frac{0,65631 - 1}{\cos 120^\circ - 0,65631} \rightarrow e_{MT} = 0,29723$$

Ο μεγάλος ημιάξονας του ίχνους μετάβασης, σχ.(8.3.1β) ή σχ.(4.3.15) με περιήλιο την απόσταση Γης – Ηλίου είναι

(1β) $\theta_{MT} = 145^\circ$: Σ' αυτή την περίπτωση αναμένεται μεγαλύτερη διάρκεια πτήσης, διότι το ίχνος μετάβασης του Δ/Ο έχει μεγαλύτερο μήκος. Ο υπολογισμός επαναλαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο θέτοντας για την αληθή ανωμαλία τη γωνία 145° αντί αυτής των 120° . Αλλάζουν λοιπόν τα μεγέθη, όπου παρουσιάζεται η θ_{MT} , και πρώτη η εκκεντρότητα, η οποία συμπαρασύρει και τα περισσότερα υπόλοιπα, αφού προκύπτει μια νέα έλλειψη μεταφοράς. Αναγράφουμε απευθείας τα αποτελέσματα του υπολογισμού με $\theta_{MT} = 145^\circ$.

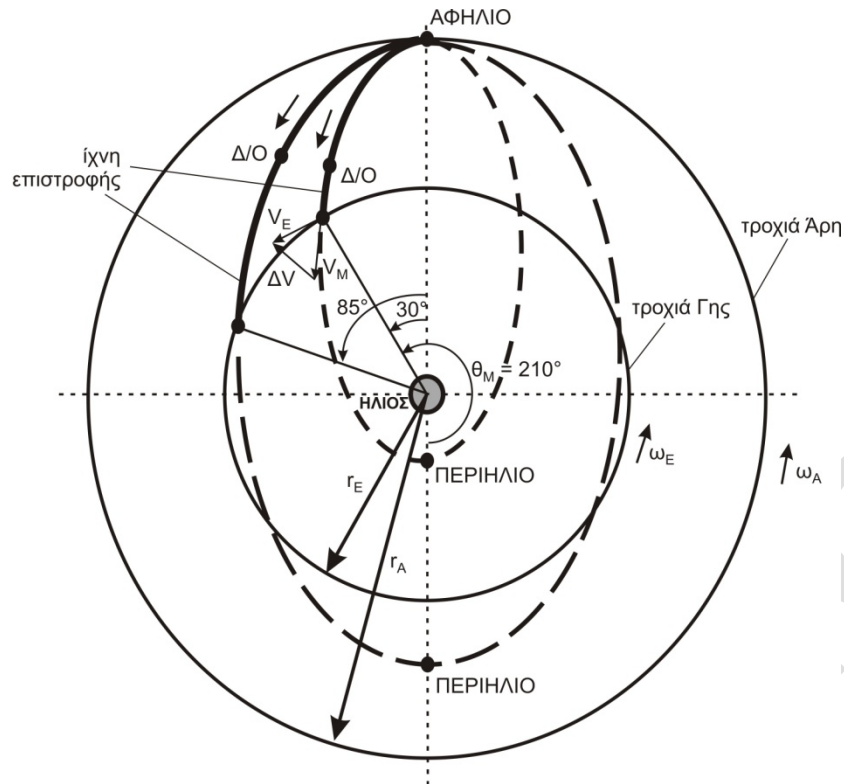
$$\begin{aligned} e_{MT} &= 0,232937 & a_{MT} &= 195027036 \text{ km} \\ V_{M1} &= 33,0722 \text{ km/s} & \Delta V_1 &= 3,2875 \text{ km/s} \\ V_{MB} &= 21,9994 \text{ km/s} & \Delta V_2 &= 4,3266 \text{ km/s} \\ \gamma_{MB} &= 9,37565^\circ & \Delta V_{tot} &= 7,6141 \text{ km/s} \\ E_{MT} &= 136,42290 = 2,38103 \text{ rad} \\ \Delta T_{MT} &= 16600810,6 \text{ s} = 4611,34 \text{ h} = 192,14 \text{ d} \approx 6,313 \text{ mo} \end{aligned}$$

(2) Το σκαρίφημα στο ΣΧΗΜΑ Ε9.4.1/2 δίνει παραστατικά τα δυο ίχνη επιστροφής. Όταν το Δ/Ο ξεκινάει από το αφήλιο, η αληθής ανωμαλία της (προηγούμενης ιδεατής) ελλειπτικής τροχιάς είναι 180° . Έτσι για την πρώτη περίπτωση των 30° έχουμε.....

(2α) $\theta_{MT} = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ την αληθή ανωμαλία στο σημείο άφιξης στη Γη. Όπως και στην προηγούμενη υποερώτηση, εφαρμόζουμε τη σχ.(8.3.15α) για την εκκεντρότητα, αλλά τώρα με θετικό πρόσσημο στον παρονομαστή

(2β) $\theta_{MT} = 180^\circ + 85^\circ = 265^\circ$: Σ' αυτή την περίπτωση αλλάζει η εκκεντρότητα του ελλειπτικού ίχνους μεταφοράς συμπαρασύροντας επίσης την αλλαγή και των υπόλοιπων μεγεθών. Αναγράφουμε απευθείας τα αποτελέσματα, αφού εφαρμόζονται οι ίδιες σχέσεις, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση:

$$\begin{aligned} e_{MT} &= 0,364546 & a_{MT} &= 167043974 \text{ km} \\ V_{M1} &= 19,2348 \text{ km/s} & \Delta V_1 &= 4,8946 \text{ km/s} \\ \gamma_{MB} &= -20,5598^\circ & V_{MB} &= 31,3014 \text{ km/s} \\ \Delta V_2 &= 11,003 \text{ km/s} & \Delta V_{tot} &= 15,8976 \text{ km/s} \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ Ε9.4.1/2 Επιστροφή του Δ/Ο από τον Αρη στη Γη με εκκίνηση από το αφήλιο και με διατροχιακό ελλειπτικό ίχνο, όταν η επιβατική ακτίνα έχει σαρώσει γωνία 30° και 85° από το αφήλιο, αντίστοιχα.

(2γ) $\theta_{MT} = 180^\circ + 130^\circ = 310^\circ$: Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογισμού με τις προηγούμενες δυο περιπτώσεις τα αποτελέσματα για την παρούσα είναι:

$$e_{MT} = 0,24172$$

$$a_{MT} = 183567300 \text{ km}$$

θ_{MT} deg	e_{MT}	a_{MT} km	V_{MI} km/s	ΔV_1 km/s	γ_{MB} deg
210°	0,796284	126894849	10,8908	13,1486	-52,05945
265°	0,364546	167043974	19,2348	4,8946	-20,5598
270°	0,343693	169636357	19,5479	4,5815	-18,9675
307°	0,2463795	182881045	20,947	3,1824	-9,7237
310°	0,24172	183567300	21,0117	3,1177	-9,1052
360°	0,207506	188768574	21,4805	2,6489	0
θ_{MT} deg	V_{MB} km/s	ΔV_2 km/s	ΔV_{tot} km/s	E_{MT} deg	ΔT_{MT} d
210°	26,989	25,0408	38,1894	257,016	96,3
265°	31,3014	11,003	15,8976	286,648	151,6
270°	31,4947	10,2368	14,8183	290,102	159
307°	32,38175	5,87	9,0524	317,618	204,2
310°	32,4236	5,5947	8,7124	319,957	180,7
360°	32,7294	2,9447	5,5936	360	258,9

ΠΙΝΑΚΑΣ Ε9.4.1/1. Η επιστροφή του Δ/Ο από τον Αρη γίνεται με ελλειπτικό ίχνο με εκκίνηση από το αφήλιο της αντίστοιχης έλλειψης μεταφοράς. Χρόνοι επιστροφής μέχρι 150 ημέρες απαιτούν μεγάλες μεταβολές ταχύτητας και κατά συνέπεια απαγορευτικές ποσότητες καυσίμων. Διάρκεια ταξιδιού 200 έως 260 ημερών αντιστοιχούν στις σημερινές τεχνολογικές δυνατότητες και γι' αυτό λαμβάνονται υπόψη στους ρεαλιστικούς σχεδιασμούς της NASA.

Στον ΠΙΝΑΚΑ Ε9.4.1/1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών με κάποιες γωνίες θ_{MT} επιπλέον. Παρατηρούμε, ότι η αύξηση της διάρκειας της αποστολής ΔT_{MT} συνεπάγεται μείωση της συνολικά

ΠΡΟΣΟΧΗ! Ο παραπάνω σχεδιασμός του ταξιδιού “Τη – Αρης – Γη” είναι ουσιαστικός και ρεαλιστικός και δίνει ορισμένα σημαντικά μεγέθη για την επιλογή του ίχνους κίνησης του διαστημοχήματος, όπως είναι η μεταβολή ταχύτητας ΔV και η διάρκεια πτήσης ΔT_{MT} .

Αποκτάει τελικά σημασία, όταν συμπληρωθεί

(α) με τον σχεδιασμό του ίχνους κίνησης του Δ/Ο μέσα στο βαρυτικό πεδίο του κάθε πλανήτη (βλ. παραγράφους 9.3.4 και 5),

(β) με το χρονισμό και τη θέση του κάθε πλανήτη κατά την αναχώρηση και άφιξη του Δ/Ο (βλ. παράγραφο 9.4.2) και

(γ) με ενδεχόμενες παραλλαγές, όπως π.χ. η συντόμευση του χρόνου επιστροφής και η μείωση της απαιτούμενης μεταβολής ταχύτητας με τη βοήθεια ενός “περάσματος” από το βαρυτικό πεδίο της Αφροδίτης (Venus swing-by), το οποίο εμπλουτίζει το ίχνος του Δ/Ο με ανέξοδη ενέργεια (βλ. π.χ. παράγραφο 4.3.7).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.4.3Α Υπολογισμός των στοιχείων τροχιών για τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος

Να υπολογισθούν για τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος τα εξής στοιχεία των τροχιών τους: (α) ο μεγάλος ημιάξονας a , (β) η ακτίνα του περιηλίου r_p , (γ) η εκκεντρότητα e , (δ) η κλίση του τροχιακού επιπέδου i και (ε) η ταχύτητα του πλανήτη στο περιήλιο και η μέση τροχιακή ταχύτητα. Ο υπολογισμός να γίνει για την εποχή 24 Ιανουαρίου 1991, ώρα 12:00 μεσημβρινή σε σχέση με τη μέση εκλειπτική και την ισημερία J2000.

Τα αποτελέσματα (α) έως (ε) να συγκριθούν με τις τιμές του ακόλουθου πίνακα, ο οποίος έχει υπολογιστεί από στοιχεία της επίσημης αναφοράς The Astronomical Almanac έτους 1991, βλ. Brown 2002.

ΠΛΑΝΗΤΗΣ	ΜΕΓΑΛΟΣ ΗΜΙΑΞΟΝΑΣ a , AU	ΑΚΤΙΝΑ ΠΕΡΙΗΛΙΟΥ $r_p \times 10^6$ km	ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ e	ΚΛΙΣΗ i , deg	ΤΑΧΥΤΗΤΑ km/s
ΕΡΜΗΣ	0,387	45,99	0,2056	7,005	47,89
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	0,723	107,437	0,0068	3,395	35,05
ΓΗ	1,000	147,10	0,0167	0,001	29,77
ΑΡΗΣ	1,524	206,72	0,0933	1,850	24,13
ΔΙΑΣ	5,203	740,84	0,0482	1,305	13,05
ΚΡΟΝΟΣ	9,516	1345,02	0,0552	2,487	9,64
ΟΥΡΑΝΟΣ	19,166	2729,29	0,0481	0,772	6,80
ΠΟΣΕΙΔΩΝΑΣ	30,011	4447,85	0,0093	1,772	5,43
ΠΛΟΥΤΩΝΑΣ	39,557	4436,42	0,2503	17,150	4,73

Δεδομένα: Από το ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3.4 έχουμε δεδομένα τα τροχιακά στοιχεία των πλανητών για τη γραμμή των ισημεριών J2000, δηλ. για την 1η Ιανουαρίου 2000, ώρα 12:00 μεσημβρία που αντιστοιχεί στην Ιουλιανή Ημέρα JD 2451545,0.

Λύση: Εφαρμόζουμε τη σχ.(9.4.21α) με τους πολωνωνικούς συντελεστές του ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ Π3.4. Η χρονική εξάρτηση εκφράζεται με το κλάσμα του Ιουλιανού αιώνα T_{TDB} με την προσέγγιση της σχ.(3.3.14α)

$$T_{TDB} = T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

Για τη δεδομένη εποχή 24η Ιανουαρίου 1991 (12:00 μεσημβρινή), η Ιουλιανή Ημέρα JD υπολογίζεται από τη σχ. (3.3.11):

.....
Το κλάσμα του Ιουλιανού Αιώνα είναι

$$T_{TDB} = \frac{2448047 - 2451545,0}{36525} \rightarrow T_{TDB} = T = -0,09577$$

Ο μεγάλος ημιάξονας a λαμβάνεται από τις αντίστοιχες τιμές του Π3.4. Για τα υπόλοιπα μεγέθη καταστρώνουμε υπολογιστικό πρόγραμμα, το οποίο δίνει την εκκεντρότητα e και την τροχιακή κλίση i σύμφωνα με τα πολωνύμια του ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ Π.3.4. Η ακτίνα περιηλίου r_p και η ταχύτητα του κάθε πλανήτη στο περιήλιο V_p καθώς και η μέση τροχιακή ταχύτητα V_μ υπολογίζονται με βάση τις σχ.(4.3.15) και σχ.(4.2.41). Οι τροχιές των πλανητών λαμβάνονται ως ελλειπτικές γύρω από τον Ήλιο (κεντρικό σώμα) με βαρυτική παράμετρο $\mu_H = 1,32712428 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$:

Ερμής:

$$a = 0,387098310 \text{ AU} = 57,90908 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$e = 0,2056297955$$

$$i = 7,005555992^\circ$$

$$\text{Αφροδίτη: } a = 0,723329820 \text{ AU} = 108,2086 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$e = 0,006776455445$$

Γη:

$$\text{Άρης: } a = 1,523679342 \text{ AU} = 227,9392 \cdot 10^6 \text{ km} \quad e = 0,0933919537$$

$$\text{Δίας: } a = 5,202603173 \text{ AU} = 778,2983 \cdot 10^6 \text{ km} \quad e = 0,04847921179$$

Κρόνος:

Ουρανός:

$$a = 19,21844606 \text{ AU} = 2875,0386 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$e = 0,04629851878 \quad i = 0,7733575865^\circ$$

$$\text{Ποσειδώνας: } a = 30,11038688 \text{ AU} = 4504,4498 \cdot 10^6 \text{ km} \quad e = 0,008987476298$$

Πλούτωνας:

Τα αποτελέσματα των παραπάνω μεγεθών για κάθε πλανήτη συγκρινόμενα με τις αντίστοιχες τιμές του πίνακα, ο οποίος έχει υπολογιστεί από στοιχεία της επίσημης αναφοράς *The Astronomical Almanac*, είναι σχεδόν ταυτόσημα με ελάχιστη απόκλιση της τάξεως του 1–2% κυρίως λόγω στρογγυλεύσεων στις αριθμητικές πράξεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.4.3B Εύρεση της θέσης του πλανητών Άρη και Αφροδίτης σε καθορισμένη ώρα κατά τον σχεδιασμό διαστημικών αποστολών από την Γη.

Κατά τον σχεδιασμό δύο διαστημικών αποστολών απαιτείται η εύρεση της θέσης των πλανητών Γης, Άρη και Αφροδίτης κατά την εποχή (ημερομηνία) 1η Απριλίου 2021 και ώρα 13 h 50 min και 28 s (ώρα Ελλάδος). Ειδικότερα πρέπει για τη συγκεκριμένη εποχή να υπολογιστούν:

- (α) η απόσταση των τριών πλανητών από τον Ήλιο,
- (β) η εκκεντρότητα της τροχιάς τους,
- (γ) το μήκος αναβιβάζοντος συνδέσμου,
- (δ) η γωνία αναβιβάζοντος συνδέσμου και περιαιψίδας,
- (ε) η αληθής ανωμαλία των τριών πλανητών.

Δεδομένα: Ημερομηνία: 1η Απριλίου 2021, Ωρα: 13 h 50 min και 28 s GT (ώρα Ελλάδος).

Λύση: Εφαρμόζουμε τη σχ.(9.4.21a) με τους πολωνυμικούς συντελεστές του ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ Π3.4. Η χρονική εξάρτηση εκφράζεται με το κλάσμα του Ιουλιανού αιώνα T_{TDB} με την προσέγγιση της σχ.(3.3.14a)

$$T_{\text{TDB}} = T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

Για τη δεδομένη εποχή 1η Απριλίου 2021, 12:00 μεσημβρινή η Ιουλιανή Ημέρα JD υπολογίζεται από τη σχ.(3.3.11):

Η Ιουλιανή Ημέρα για την ώρα 13 h 50 min και 28 s GT, δηλ. 13,8411 h GT (10,8411 h UT, στην χρονική περίοδο μεταξύ της τελευταίας Κυριακής του Μαρτίου έως την πρώτη Κυριακή του Οκτωβρίου εφαρμόζεται η θερινή ώρα με $\Delta T = 3 \text{ h}$) είναι:

$$F = 10,8411/24 = 0,4517$$

$$JD = 2459306 + 0,4517 - 0,5 \rightarrow JD = 2459305,952$$

Το κλάσμα του Ιουλιανού Αιώνα είναι

$$T = \frac{2459305,952 - 2451545,0}{36525} \rightarrow T = 0,21248328$$

Ο μεγάλος ημιάξονας a λαμβάνεται από τις αντίστοιχες τιμές του Π3.4. Για τα υπόλοιπα μεγέθη καταστρώνουμε υπολογιστικό πρόγραμμα, το οποίο δίνει την εκκεντρότητα e , το μήκος του αναβιβάζοντος συνδέσμου Ω , το μήκος του περιηλίου Π και το αληθές μήκος l σύμφωνα με τα πολυώνυμα του ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ Π.3.4 ενώ η απόσταση r των πλανητών από τον Ήλιο προσδιορίζεται από τη σχ.(4.2.11α). Η γωνία αναβιβάζοντος συνδέσμου και περιηλίου ω και η αληθής ανωμαλία θ των πλανητών υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχ.(4.6.5) και σχ.(4.6.7):

Γη: $a = 1,00001018 \text{ AU} = 149,5994 \cdot 10^6 \text{ km}$, $e = 0,01669968$

$$\Omega = 0,0^\circ, \quad \Pi = 103,0058925^\circ, \quad l = 7749,731494^\circ$$

Για να λάβουμε το αποτέλεσμα για τη ζητούμενη χρονική στιγμή διαιρούμε διά του 360° και κρατούμε το δεκαδικό μέρος του πηλίκου, το οποίο πολλαπλασιάζουμε επί το 360° :

$$7749,731494^\circ : 360^\circ = 21,52703193 \rightarrow 0,52703193$$

$$l = 0,52703193 \cdot 360^\circ = 189,731494^\circ$$

$$\omega = \Pi - \Omega = 103,0058925^\circ - 0,0^\circ = 103,0058925^\circ$$

$$\theta = l - \Pi = 189,731494^\circ - 103,0058925^\circ = 86,726015^\circ$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = \frac{1,00001018(1-0,01669968^2)}{1+0,01669968 \cos(86,726015^\circ)} \rightarrow$$

$$r = 0,9987787318 \text{ AU} = 149,4152 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Άρης:

$$a = 1,523679342 \text{ AU} = 227,9392 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$e = 0,09341984248$$

$$\Omega = 49,49538479^\circ$$

$$\theta = -233,7275853^\circ$$

Η αρνητική αυτή γωνία αληθούς ανωμαλίας υποδηλώνει, ότι ο πλανήτης Άρης τη δεδομένη ημερομηνία και θέση, έχει ήδη διανύσει τη διαφορά από την πλήρη περιφορά του περί το Ήλιο:

$$\theta = 360^\circ - 233,7275853^\circ = 126,2724147^\circ, \quad r = 1,598743581 \text{ AU} = 239,1686 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Αφροδίτη: $a = 0,723329820 \text{ AU} = 108,2086 \cdot 10^6 \text{ km}$

$$\theta = -115,5269179^\circ$$

Η αρνητική αυτή γωνία αληθούς ανωμαλίας υποδηλώνει, ότι ο πλανήτης Αφροδίτη τη δεδομένη χρονική στιγμή έχει ήδη διανύσει τη διαφορά από την πλήρη περιφορά του περί το Ήλιο:

$$\theta = 360^\circ - 115,5269179^\circ = 244,4730821^\circ, \quad r = 0,7205384099 \text{ AU} = 107,7910 \cdot 10^6 \text{ km}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.4.3Γ 'Παράθυρο' εκτόξευσης ερευνητικού διαστημοχήματος σε Άρη και Αφροδίτη.

Κατά τον σχεδιασμό μιας αποστολής ερευνητικού διαστημοχήματος στον Άρη και μιας άλλης στην Αφροδίτη με ίχνος πτήσης την ημιέλλειψη μεταφοράς κατά Χόμαν ζητείται:

(α) να καθοριστεί η διαφορά φάσεως μεταξύ Γης και των δυο πλανητών, ώστε το κάθε Δ/Ο να επιτύχει την αποστολή του.

(β) Να δειχθούν τα στιγμιότυπα του παραθύρου εκτόξευσης σ' ένα απλουστευμένο σκαρίφημα.

(γ) Να εξετασθεί επίσης πόσο συχνά επαναλαμβάνεται αυτή η ευνοϊκή συγκυρία, δηλ. η ευκαιρία (ή το παράθυρο) εκτόξευσης.

(δ) Για τον υπολογισμό να χρησιμοποιηθούν οι τύποι, σχ.(9.4.26 και 27), των οποίων ζητείται επίσης η απόδειξη.

Οι αποστάσεις των πλανητών από τον Ήλιο είναι για τη Γη $149598023 \text{ km} \approx 1 \text{ AU}$, τον Άρη $1,52367934 \text{ AU}$ και την Αφροδίτη $0,72332982 \text{ AU}$ και η βαρυτική παράμετρος του Ήλιου $1,32712428 \text{ km}^3/\text{s}^2$. Η αστρονομική μονάδα είναι $1 \text{ AU} = 149597871 \text{ km}$.

Δεδομένα: Οι αποστάσεις των τριών πλανητών από τον Ήλιο και η βαρυτική παράμετρος του Ήλιου όπως στην εκφώνηση καθώς και οι σχ.(9.4.26 και 27).

Λύση: (α) Για τον Άρη ως εξωτερικό πλανήτη (ως προς τη Γη) η γωνία φάσεως ϕ υπολογίζεται από τη σχ.(9.4.26) και για την Αφροδίτη ως εσωτερικό πλανήτη από τη σχ.(9.4.27):

$$\phi_{A\Sigma} = \phi_{12} = \pi \left(1 - \left(\frac{1+\bar{r}}{2\bar{r}} \right)^{1,5} \right) \leftarrow \bar{r} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_A}{r_E} = 1,52367934$$

Άρης:

Ο Άρης προπορεύεται της Γης κατά την παραπάνω γωνία φάσης. Πρόκειται για το ίδιο αποτέλεσμα που προέκυψε με διαφορετικό τρόπο στη σχ.(9.4.12).

$$\phi_{A\Sigma} = \phi_{21} = \pi \left(1 - \left(\frac{1+\bar{r}}{2} \right)^{1,5} \right) \leftarrow \bar{r} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_E}{r_V} = \frac{1}{0,72332982} = 1,3824952$$

Αφροδίτη:

Η Αφροδίτη έπεται της Γης κατά την παραπάνω γωνία φάσης, σχ.(9.4.28).

(β) Τα ακόλουθα σκαριφήματα δείχνουν τις συγκυρίες των παραθύρων εκτόξευσης προς τον Άρη και την Αφροδίτη.

(γ) Παρατηρούμε τα παραπάνω σκαριφήματα σε σχέση με το **ΣΧΗΜΑ 9.4/3** και την ανάλυση της παραγράφου 9.4.2. Η απευθείας εκτόξευση και μετάβαση του Δ/Ο από τη Γη προς τους πλανήτες με τον οικονομικότερο (ελαχιστοποιημένης μάζας προωθητικού) ίχνος της ημιέλλειψης κατά Hohmann (Χόμαν) είναι δυνατή, μόνο όταν οι πλανήτες ευρίσκονται σε συζυγία. Όταν πρόκειται για μετάβαση σε εξωτερικό πλανήτη, όπως στον Άρη, απαιτείται σύνοδος του πλανήτη με τη Γη, δηλ. στοίχιση στη σειρά: Γη, στη θέση της κατά την εκτόξευση, Ήλιος, Άρης στη θέση του κατά την άφιξη του Δ/Ο σ' αυτόν. Για μετάβαση σε εσωτερικό πλανήτη, όπως στην Αφροδίτη, απαιτείται σύνοδος του πλανήτη με τη Γη, δηλ. στοίχιση στη σειρά: Γη στη θέση της κατά την εκτόξευση, Ήλιος, Αφροδίτη στη θέση της κατά την άφιξη του Δ/Ο σ' αυτήν.

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο συνόδων είναι μια συνοδική περίοδος, η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχ.(9.4.17):

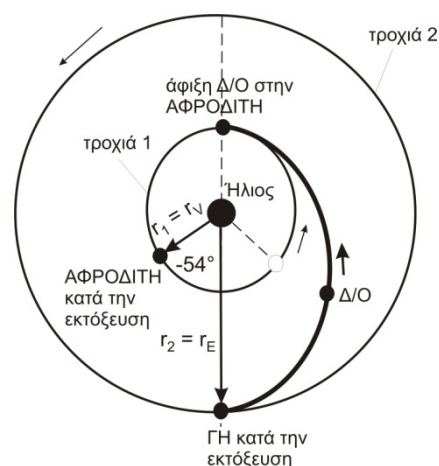
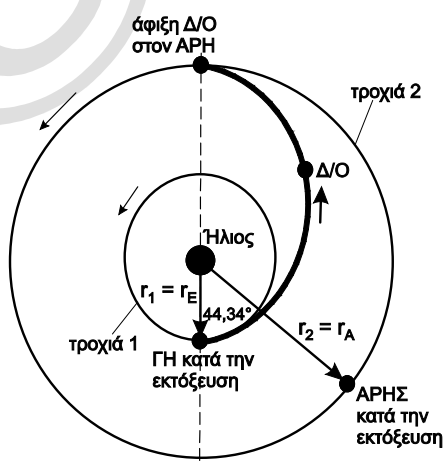
$$T_{S,EA} = \frac{2\pi}{|\omega_A - \omega_E|} \text{ για Άρη, } T_{S,EV} = \frac{2\pi}{|\omega_E - \omega_V|} \text{ για Αφροδίτη}$$

Άρα η ευκαιρία εκτόξευσης είναι κάθε $780 d \approx 2,14 \text{ έτη}$ για τον Άρη και κάθε $584 d \approx 1,6 \text{ έτη}$ για την Αφροδίτη.

(δ) Η γωνία φάσεως από τη σχ.(9.4.25) είναι:

$$\phi_{12} = \pi - \omega_2 T_{MT} \text{ με } \omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_H}{r_2^3}} \text{ και}$$

$$T_{MT} = \frac{1}{2} P_{MT} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_H/\alpha_{MT}^3}} \text{ με } \alpha_{MT} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



$$\bar{r} = \frac{r_2}{r_1} = 1,52367934$$

Παράθυρο εκτόξευσης του Δ/Ο προς τον Άρη προκύπτει μόνο όταν

- ΓΗ (κατά την εκτόξευση) – ΗΛΙΟΣ – ΑΡΗΣ (κατά την άφιξη) ευρίσκονται σε σύνοδο.

$$\bar{r} = \frac{r_2}{r_1} = 1,3824952$$

Παράθυρο εκτόξευσης του Δ/Ο προς την Αφροδίτη προκύπτει μόνο όταν

- ΓΗ (κατά την εκτόξευση) – ΗΛΙΟΣ – ΑΦΡΟΔΙΤΗ (κατά την άφιξη) ευρίσκονται σε σύνοδο, και μάλιστα ανώτερη σύνοδο.

Και η γωνία φάσεως για τον εξωτερικό πλανήτη με $r_2 > r_1$ είναι:

Για τον εσωτερικό πλανήτη Αφροδίτη παρατηρώντας το δεξιό από τα παραπάνω σκαριφήματα διαπιστώνουμε, ότι η Αφροδίτη για να φθάσει στη θέση συνάντησης με το Δ/Ο διανύει τη γωνιακή απόσταση $\pi - \phi_{21}$ με τη γωνιακή της ταχύτητα ω_1 στη διάρκεια του χρόνου μετάβασης του Δ/Ο T_{MT} από τη Γη στην Αφροδίτη. Έτσι ισχύει:

$$\omega_1 T_{MT} = \sqrt{\frac{\mu_H}{r_1^3}} \cdot \pi / \sqrt{\left(\frac{\mu_H}{(r_1+r_2)/2}\right)^3} = \pi \sqrt{\left(\frac{r_1+r_2}{2r_1}\right)^3} = \pi \left(\frac{1+\bar{r}}{2}\right)^{3/2} \text{ με } \bar{r} = \frac{r_2}{r_1}$$

Και η γωνία φάσεως για εσωτερικό πλανήτη είναι:

$$\phi_{21} = \pi \left(1 - \left(\frac{1+\bar{r}}{2} \right)^{3/2} \right), \text{ δηλ. η σχ. (9.4.27)}$$

Επειδή για εσωτερικούς πλανήτες είναι πάντοτε $\bar{r} = r_2/r_1 > 1$ η ϕ_{21} προκύπτει αρνητική, δηλ. είναι γωνία υστέρησης σε σχέση με την ευθεία Γης-Ηλιου. Τούτο προέκυψε ήδη στην υποερώτηση (α) και αποτυπώνεται επίσης στο δεξιό παραπάνω σκαρίφημα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.5.4 Αποφυγή αστοχίας για το ταξίδι του Δ/Ο από τη Γη στην Αφροδίτη

Για το ταξίδι του Δ/Ο από τη Γη στην Αφροδίτη, που αναλύθηκε στην **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9.3.7**, οι τροχιές αναμονής ήταν σε ύψος 330 km από την επιφάνεια της Γης και 670 km από της Αφροδίτης. Η σχετική ταχύτητα εκφυγής του Δ/Ο ήταν 2,495 km/s και η σχετική ταχύτητα εισόδου στο βαρυτικό πεδίο της Αφροδίτης 2,709 km/s.

Να υπολογιστεί η απόσταση αστοχίας B για τις δυο αυτές περιπτώσεις.

Δεδομένα: $h_{TAE} = 330 \text{ km}$, $h_{TAS} = 670 \text{ km}$, $W_{\Delta OE} = 2,495 \text{ km/s}$, $W_{\Delta OS} = 2,709 \text{ km/s}$

$$R_E = 6378,136 \text{ km}, R_S = 6052 \text{ km}, \mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2, \mu_S = 352700 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

Λύση: Εφαρμόζουμε τη σχ.(9.5.1) για την απόσταση αστοχίας B_E του ίχνους εκφυγής από τη Γη και τη σχ.(9.5.14) για την απόσταση B_S του ίχνους εισόδου στη σφαίρα επιρροής της Αφροδίτης. Προηγούμενα χρειαζόμαστε τις αντίστοιχες ακτίνες περιψίδας στη Γη και την Αφροδίτη:

Η απόσταση αστοχίας (ή αποφυγής) του υπερβολικού ίχνους εκφυγής είναι:

$$B_E = 30068 \text{ km}$$

Όπως διακρίνουμε στο **ΣΧΗΜΑ 9.5/1β** η B_E ορίζει το "διάδρομο εκφυγής" από τη σφαίρα επιρροής της Γης για να εισέλθει στο ελλειπτικό ίχνος μετάβασης προς την Αφροδίτη.

Η απόσταση αστοχίας του ίχνους άφιξης στην Αφροδίτη είναι:

Η B_{Σ} ορίζει το "διάδρομο εισόδου" στη σφαίρα επιρροής της Αφροδίτης, όπως φαίνεται στο **ΣΧΗΜΑ 9.5/3**. Κάθε απόκλιση από τη B_{Σ} επιφέρει τον κίνδυνο το Δ/Ο να προσπεράσει τον πλανήτη ή να προσκρούσει σε αυτόν, όπως αναφέρεται στη σχ.(9.5.13).

© tolyno