

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΛΙΓΜΟΙ ΔΙΑΣΤΗΜΟΧΗΜΑΤΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.1.1Α Αρειανό δορυφορικό διαστημόχημα σε μετάβαση από χαμηλότερη κυκλική τροχιά σε ανώτερη και κατόπιν σε επιστροφή στη κατώτερη.

Σχεδιάζεται η μεταφορική τροχιά κατά Hohmann ενός διαστημοχήματος (Δ/Ο), που κινείται δορυφορικά στον πλανήτη Άρη από τροχιά ύψους 4600 km σε κυκλική τροχιά περί τον Άρη ακτίνας 15000 km και πρέπει εκεί να έχει συνολική μάζα 1025 kg.

(α) Να ευρεθούν οι αναγκαίες μεταβολές ταχύτητας και η απαιτούμενη μάζα προωθητικού.

(β) Να σχεδιαστεί επίσης η κάθοδος από την υψηλότερη στη χαμηλότερη τροχιά.

Η αρειανή βαρυτική παράμετρος είναι $43050 \text{ km}^3/\text{s}^2$, η ακτίνα του πλανήτη Άρη 3397,2 km και η ειδική ώθηση του προωθητικού 290 s.

Δεδομένα: $h_1 = 4600 \text{ km}$, $r_2 = 15000 \text{ km}$, $\mu_A = 43050 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_A = 3397,2 \text{ km}$, $I_{sp} = 290 \text{ s}$, $M_2 = 1025 \text{ kg}$.

Λύση: (α) Από τις γνωστές σχ.(8.1.5α, β) προκύπτουν οι ταχύτητες στις δύο κυκλικές τροχιές O_1 και O_2 με την ακτίνα r_1 της τροχιάς O_1 να είναι: $r_1 = R_A + h_1 = 3397,2 + 4600 \rightarrow r_1 = 7997,2 \text{ km}$

Η ταχύτητα στο περιάρειο της ελλειπτικής τροχιάς Hohmann για να ξεκινήσει η μετάβαση πρέπει να είναι

$$V_{pH} = \sqrt{\frac{2\mu_A}{r_1} - \frac{2\mu_A}{r_1+r_2}} \quad V_{pH} = 2,64997 \text{ km/s}$$

Η ταχύτητα στο αποάρειο της μεταβατικής τροχιάς Hohmann είναι

$$V_{aH} = \sqrt{\frac{2\mu_A}{r_2} - \frac{2\mu_A}{r_1+r_2}} \quad V_{aH} = 1,41282 \text{ km/s}$$

Η συνολική αύξηση ταχύτητας για να ολοκληρωθεί η μεταφορά στη νέα τροχιά είναι $\Delta V_{\text{tot}} = 0,6111 \text{ km/s}$

Ο απαιτούμενος χρόνος για να ολοκληρωθεί η μεταφορά στην τελική τροχιά είναι το ήμισυ της ελλειπτικής περιόδου, σχ.(8.1.10), βλ. επίσης σχ.(4.2.26α) $P_H = \Delta t = 18669,4 \text{ s} = 5 \text{ h } 11 \text{ min } 9,4 \text{ s}$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση των μαζών κατά Τσιολκόφσκυ, σχ.(8.1.12α),

Η ποσότητα των αναγκαίων καυσίμων για την υλοποίηση της τροχιακής μετάβασης από O_1 σε O_2 είναι $M_K = 245,7 \text{ kg}$

(β) Η επιστροφή του Δ/Ο από την υψηλότερη ακτίνας 15000 km στην χαμηλότερη ακτίνας 7997,2 km είναι συμμετρική του προηγούμενου ανοδικού ελλειπτικού ίχνους κατά Hohmann με τη βασική διαφορά, ότι αντί επιταχύνσεων πρέπει

Η απαιτούμενη μάζα προωθητικού είναι επίσης η ίδια

$$M_{K,KA\Theta} = M_{K,ANO\Delta} \rightarrow M_{K,KA\Theta} = 245,7 \text{ kg}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.1.1B Τχνος κίνησης για τη μεταφορά προς επισκευή δορυφόρου στον Διεθνή Διαστημικό Σταθμό ΔΔΣ

Ένας δορυφόρος (Δ/Φ) κατοπτρεύσεων υψηλής ευκρίνειας με μάζα 650 kg ευρισκόμενος σε κυκλική τροχιά ύψους 14701,864 km πρέπει να μεταφερθεί προς επισκευή στον Διεθνή Διαστημικό Σταθμό (Δ/Σ), ο οποίος ευρίσκεται σε τροχιά ύψους 421,864 km γύρω από τη Γη. Για τον σκοπό αυτόν χρησιμοποιείται ένα αυτοματοποιημένο Δ/Ο, το οποίο πρόκειται να μετακινηθεί από τον Δ/Σ προς περισυλλογή και μεταφορά του Δ/Φ στον Δ/Σ. Η μάζα της δομής του Δ/Ο (μάζα χωρίς καύσιμα και ωφέλιμο φορτίο) είναι 360 kg και το προωθητικό του έχει ειδική ώθηση 288 s. Η γήινη ακτίνα και βαρυτική παράμετρος είναι 6378,136 km και $398600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$, αντίστοιχα.

(α) Να υπολογισθούν όλα τα στοιχεία του ελλειπτικού ίχνους μετάβασης και επιστροφής (μέγεθος ίχνους, ταχύτητες, κ.α.).

(β) Να ευρεθούν οι απαιτούμενες ποσότητες προωθητικού για την ολοκλήρωση της αποστολής υποστηρίζοντας του Δ/Φ λαμβάνοντας 10% πρόσθετη ποσότητα για λόγους ασφαλείας.

Δεδομένα: Χαμηλή Γήινη Τροχιά Δ/Σ: $h_1 = 421,864 \text{ km}$, τροχιά Δ/Φ: $h_2 = 14701,864 \text{ km}$, μάζα Δ/Φ: $M_{\Delta/\Phi} = 650 \text{ kg}$, μάζα δομής Δ/Ο: $M_{\Delta O M H, \Delta / O} = 360 \text{ kg}$, $I_{sp} = 288 \text{ s}$, $\mu_E = 398600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$.

Λύση: (α) Οι ακτίνες των τροχιών του Δ/Σ και του Δ/Φ είναι:

$$\begin{aligned} \text{χαμηλή: } r_1 &= R_E + h_1 = 6378,136 + 421,864 \rightarrow r_1 = 6800 \text{ km} \\ \text{υψηλή: } r_2 &= R_E + h_2 = 6378,136 + 14701,864 \rightarrow r_2 = 21080 \text{ km} \end{aligned}$$

και οι αντίστοιχες κυκλικές τροχιακές ταχύτητες $V_1 = 7656,22 \text{ m/s}$ $V_2 = 4348,44 \text{ m/s}$

Κατά την κάθοδο μεταφοράς του Δ/Φ το σημείο εκκίνησης είναι το απόγειο του ελλειπτικού ίχνους κατά Hohmann με

Η άφιξη στη χαμηλή τροχιά γίνεται με την ταχύτητα περιγείου

$$V_{pH} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_{pH}} - \frac{\mu_E}{a_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600,44}{6800} - \frac{398600,44}{13940}} \rightarrow V_{pH} = 9414,96 \text{ m/s}$$

και απαιτείται μείωση της ταχύτητας κατά ΔV_1

(β) Οι επιμέρους μάζες προωθητικού απαιτούν προσοχή, διότι η μάζα αφίξεως είναι διαφορετική στις δύο μετακινήσεις. Κατά την άφιξη του Δ/Φ και του Δ/Ο στη χαμηλή τροχιά (1) η τελική μάζα είναι:

$$M_{1T} = M_{\Delta/\Phi} + M_{\Delta O M H, \Delta / O} = 650 + 360 \rightarrow M_{1T} = 1010 \text{ kg}$$

Η ποσότητα καυσίμου καθόδου υπολογίζεται από την πυραυλική εξίσωση, σχ. (8.1.12α):

$$\begin{aligned} M_{K,KA\Theta} &= M_{1T} \left(e^{\frac{\Delta V_{KA\Theta}}{g_n I_{sp}}} - 1 \right) = 1010 \left(e^{\frac{3070,1}{g_n \cdot 288}} - 1 \right) = 1010 \cdot 1,965437 \rightarrow \\ M_{K,KA\Theta} &= 1985,1 \text{ kg} \end{aligned}$$

Η τελική μάζα του Δ/Ο υποστηρίζεως κατά την άφιξή του στην υψηλή τροχιά είναι: $M_{2T} = 2345,1 \text{ kg}$

Η ποσότητα καυσίμου της ανόδου υπολογίζεται από την ίδια εξίσωση:

$$M_{K,ANO\Delta} = M_{2T} \left(e^{\frac{\Delta V_{ANO\Delta}}{g_n I_{sp}}} - 1 \right)$$

Οπότε για την ολοκλήρωση της αποστολής απαιτείται ποσότητα προωθητικού $M_K = 6594,25 \text{ kg}$

Σ' αυτή την ποσότητα προσθέτουμε το ποσοστό ασφαλείας 10% οπότε $M_K = 7253,7 \approx 7254 \text{ kg}$ και η συνολική μάζα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.1.2 Ελιγμός μετάβασης Διαστημοχήματος από χαμηλή γήινη τροχιά σε επιχειρησιακή τροχιά ύψους 376300 km.

Η επιχειρησιακή τροχιά ενός ερευνητικού Δ/Ο έχει ύψος 376300 km, στην οποία έφθασε με τη βοήθεια δισελλειπτικού ίχνους μεταφοράς από γήινη κυκλική τροχιά ύψους 191 km. Για τον ελιγμό μετάβασης έγινε επιλογή του κοινού απογείου σε ακτίνα 510250 km από το κέντρο της Γης, της οποίας η ακτίνα και η βαρυτική παράμετρος λαμβάνονται 6378 km και $398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, αντίστοιχα.

(α) Ποια συνολική μεταβολή ταχύτητας απαιτήθηκε για την αποστολή αυτή και ποια η διάρκεια της αποστολής;

(β) Να ελεγχθεί το αποτέλεσμα (α) με τους αδιάστατους τύπους των σχ. (8.1.20 έως 23).

(γ) Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων (α) και (β) με τη μετάβαση του μονού ελλειπτικού ίχνους κατά Hohmann.

Δεδομένα: Ύψος αρχικής τροχιάς: $h_1 = 191 \text{ km}$, ύψος τελικής τροχιάς: $h_2 = 376300 \text{ km}$, ακτίνα κοινού απογείου: $r_a = 510250 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_E = 6378 \text{ km}$.

Λύση:

(α) Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις, σχ. (8.1.14 έως 19 και 8.1.24) και τις εφαρμόζουμε κατά τη σειρά της μετάβασης:

$$\begin{aligned} r_1 &= R_E + h_1 = 6378 + 191 \rightarrow r_1 = 6569 \text{ km} \\ r_2 &= R_E + h_2 = 6378 + 376300 \rightarrow r_2 = 382678 \text{ km} \end{aligned}$$

Ταχύτητα Δ/Ο στην τροχιά αναμονής: $V_1 = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600,4}{6569}} \rightarrow V_1 = 7789,67 \text{ m/s}$

Ταχύτητα Δ/Ο στην επιχειρησιακή τροχιά: $V_2 = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_2}} = \sqrt{\frac{398600,4}{382678}} \rightarrow V_2 = 1020,6 \text{ m/s}$

Μεγάλος ημιάξονας 1ου ημιελλειπτικού ίχνους ανόδου:

Ταχύτητα άφιξης του Δ/Ο στο απόγειο του 1ου ημιελλειπτικού ίχνους:

$$V_{aH1} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_a} - \frac{\mu_E}{a_{H1}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600,4}{510250} - \frac{398600,4}{258409,5}} \rightarrow V_{aH1} = 140,92 \text{ m/s}$$

2η αλλαγή (ΑΥΞΗΣΗ) ταχύτητας του Δ/Ο από V_{aH1} σε V_{aH2} :

3η αλλαγή (ΜΕΙΩΣΗ) ταχύτητας του Δ/Ο για να αποκτήσει την ταχύτητα της επιχειρησιακής τροχιάς $V_2 = 1020,6 \text{ m/s}$:

Συνολική απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας:

$$\Delta V_{\text{tot}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 3156,36 + 677,36 + 70,467 \rightarrow$$

$$\Delta V_{\text{tot}} = 3904,18 \text{ m/s}$$

(β) Χρησιμοποιούμε τις σχ.(8.1.20 έως 23), οι οποίες με τα αδιάστατα μεγέθη ρ και ρ_2 ,

$$\rho = \frac{r_a}{r_1} = \frac{510250}{6569} = 77,6755, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{382678}{6569} = 58,2551$$

1η αλλαγή ταχύτητας:

2η αλλαγή ταχύτητας:

3η αλλαγή ταχύτητας του Δ/Ο

Και τα δύο αποτελέσματα (α) και (β) συμπίπτουν. Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού είναι αμεσότερος αλλά από φυσικής πλευράς αδιαφανής!

(γ) Το απλό ημιελλειπτικό ίχνος μεταξύ της τροχιάς με r_1 και της τροχιάς με r_2 απαιτεί δύο αλλαγές ταχύτητας στο περίγειο και στο απόγειο με μεγάλο ημιμάζονα

$$a_H = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{6569 + 382678}{2} \rightarrow a_H = 194623,5 \text{ km}$$

Η ταχύτητα του Δ/Ο στο περίγειο πρέπει να είναι

$$V_{pH} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_E}{a_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600,4}{6569} - \frac{398600,4}{194623,5}} \rightarrow$$

$$V_{pH} = 10922,9 \text{ m/s}$$

1η αλλαγή (ΑΥΞΗΣΗ) ταχύτητας του Δ/Ο:

Η επιχειρησιακή τροχιά επιβάλλει ταχύτητα V_2 . Γι' αυτό η

$$\Delta V_2 = |V_2 - V_{aH}| = 1020,6 - 187,5 \rightarrow \Delta V_2 = 833,1 \text{ m/s}$$

2η αλλαγή (ΑΥΞΗΣΗ) ταχύτητας του Δ/Ο:

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παρατηρούμε, ότι η ακτίνα της τελικής τροχιάς των 382678 km είναι σχεδόν ίση με την απόσταση της Σελήνης από τη Γη, δηλ. 384400 km, και το Δ/Ο της εφαρμογής μας μπαίνει στο βαρυτικό της πεδίο (αν το τροχιακό του επίπεδο συμπίπτει μ' αυτό της εκλειπτικής της Σελήνης!). Η συνολική απαιτούμενη αύξηση ταχύτητας είναι η παραπάνω $\Delta V_{\text{tot}} = 3904 \text{ m/s}$ της διελλειπτικής μεταφοράς και η αρχική αύξηση ταχύτητας από τη Γη στην τροχιά αναμονής των 191 km, όπου η ταχύτητα πρέπει να είναι - όπως υπολογίσαμε - περίπου 7790 m/s, στην οποία πρέπει να προσθέσουμε ~ 18% για την υπερνίκηση της αντίστασης της γήινης ατμόσφαιρας, της γήινης βαρύτητας και των απωλειών καθοδήγησης του πυραύλου εκτόξευσης, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 7. Το σύνολο της απαιτούμενης ΔV για το ταξίδι στη Σελήνη με τον τρόπο της εφαρμογής αυτής είναι λοιπόν $7790 \cdot 1,18 + 3904 \approx 13096 \text{ m/s}$. Η τιμή αυτή είναι περίπου η ίδια με την απαιτούμενη ΔV για το ταξίδι στη Σελήνη με υπερβολική τροχιά εκφυγής, όπως θα αναλύσουμε στο Κεφάλαιο 9 (Διαπλανητικά ταξίδια). Τούτο σημαίνει, ότι είτε με τον έναν είτε με τον άλλον τρόπο η απαιτούμενη ενέργεια για να εκφύγει ένα Δ/Ο από το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι η ίδια!

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.2.1 Ακραία ελλειπτική τροχιά τύπου Μολνίγια και επιλογή συστήματος εκτόξευσης του ομώνυμου δορυφόρου.

Ένας δορυφόρος (Δ/Φ) τύπου Μολνίγια πρέπει να φθάσει στη γνωστή ακραία ελλειπτική τροχιά του με εκκεντρότητα 0,7222, μεγάλο ημιμάζονα 26555 km και κλίση ~ 63°. Για την εκτόξευσή του από το ρωσικό πεδίο εκτοξεύσεων Plesetsk (~ 63° N) είναι διαθέσιμα δύο εκτοξευτικά συστήματα Proton για να θέσουν το Δ/Φ σε χαμηλή γήινη τροχιά αναμονής. Το ένα σε κυκλική ύψους 222 km και το άλλο σε ελλειπτική με περίγειο 155 km και απόγειο 750 km.

Να επιλεγεί αυτό το σύστημα εκτόξευσης που οδηγεί στη μικρότερη συνολική αλλαγή ταχύτητας ΔV_{tot} για να εισαχθεί ο Δ/Φ στην επιχειρησιακή τροχιά του.

Η γήινη ακτίνα είναι 6378,136 km, η βαρυτική παράμετρος $398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Δεδομένα: Ρωσικός (πρώην Σοβιετικός) Δ/Φ Molniya σε τροχιά με $e = 0,7222$, $a_2 = 26555 \text{ km} = a_H$, $i = 63^\circ$, εκτόξευση από Plesetsk (Ρωσία) με γεωγραφικό πλάτος $L_{ΠΕ} = 63^\circ \text{ N}$ σε μεταβατική γήινη τροχιά, η μία κυκλική ύψους $h_1 = 222 \text{ km}$, η άλλη ελλειπτική με $h_{p1} = 155 \text{ km}$, $h_{a1} = 750 \text{ km}$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση: Επειδή η κλίση $i = 63^\circ$ του επιπέδου της τροχιάς του Δ/Φ είναι ίση με το γεωγραφικό πλάτος του πεδίου εκτόξευσης $L_{ΠΕ} = 63^\circ$, δεν απαιτείται αλλαγή κλίσης του τροχιακού επιπέδου και ο ελιγμός είναι συνεπίπεδος. Εξετάζουμε πρώτα τη μεταφορά του Δ/Ο Molniya από χαμηλή γήινη ελλειπτική τροχιά στην τελική ελλειπτική χρησιμοποιώντας τις σχ.(8.2.1 έως 4). Η πρώτη αλλαγή ταχύτητας γίνεται στο περίγειο της γήινης τροχιάς αλλά χρειάζονται κάποια μεγέθη. Οι ακτίνες των αψίδων και ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς αναμονής είναι:

$$\begin{aligned} r_{p1} &= R_E + h_{p1} = 6378,136 + 155 \rightarrow r_{p1} = 6533,136 \text{ km} = r_{pH} \\ r_{a1} &= R_E + h_{a1} = 6378,136 + 750 \rightarrow r_{a1} = 7128,136 \text{ km} \end{aligned}$$

Την ακτίνα περιγείου του ελλειπτικού ίχνους δίνει η σχ.(4.3.15)

Με κυκλική χαμηλή γήινη τροχιά αναμονής ύψους 222 km ή ακτίνας

$$r_1 = R_E + h_1 = 6378,136 + 222 \rightarrow r_1 = 6600,136 \text{ km}$$

η μεταβολή ταχύτητας στο περίγειο του ελλειπτικού ίχνους μετάβασης είναι:

$$\Delta V_1 = V_{pH} - V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_{pH}} - \frac{\mu_E}{\alpha_H}} - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_1}}$$

και γι' αυτό αποτελεί την τελική επιλογή, αφού οδηγεί σε περίπου 12% εξοικονόμηση προωθητικού. Πράγματι με τη σχ.(8.1.12α), όπως εύκολα υπολογίζεται με την παραδοχή της εύλογης τιμής της ειδικής ώθησης προωθητικού $I_{sp} = 280 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} \frac{M_K}{M_2} &= e^{\frac{\Delta V}{g_n I_{sp}}} - 1 \rightarrow \delta \left(\frac{M_K}{M_2} \right) = \left(\frac{M_K}{M_2} \right)_{\text{ΚΥΚΛ.}} - \left(\frac{M_K}{M_2} \right)_{\text{ΕΛΛ.}} = \\ &= e^{\frac{2575,94}{g_n^{280}}} - e^{\frac{2433,66}{g_n^{280}}} = 2,55517 - 2,42614 = 0,129 \end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.3.1 Κίνηση τηλεπικοινωνιακού Δ/Φ από χαμηλή μεταβατική τροχιά προς την επιχειρησιακή γεωσύγχρονη τροχιά ακτίνας 42.164 km .

Ένας τηλεπικοινωνιακός Δ/Φ έχει τεθεί μετά την εκτόξευσή του σε κυκλική μεταβατική τροχιά ύψους $191,864 \text{ km}$ και πρόκειται να μεταβεί με τη βοήθεια αυτοφερόμενου προωθητικού συστήματος σε γεωσύγχρονη τροχιά, δηλ. γήινη κυκλική τροχιά ακτίνας 42164 km . Η μετάβαση γίνεται με μονοεφαπτομενική τροχιά στο σημείο που η αληθής ανωμαλία είναι 160° . Τούτο σημαίνει, ότι το ίχνος πτήσης του Δ/Ο είναι ελλειπτικό με εφαπτομενική εκκίνηση από τη μεταβατική τροχιά και ελιγμό προσαρμογής στο σημείο τομής της τροχιάς μεταφοράς με τη γεωσύγχρονη.

Να υπολογιστούν τα στοιχεία της τροχιάς μεταφοράς σύμφωνα με τη μέθοδο της παραγράφου 8.3.1 και ειδικότερα η γωνία πτήσης και η αληθής ανωμαλία στο σημείο συνάντησής του Δ/Ο με τη γεωσύγχρονη τροχιά του καθώς και η απαιτούμενη συνολική μεταβολή της ταχύτητας του Δ/Ο.

Δεδομένα: Η μετάβαση του Δ/Φ έχει εκκίνηση το απόγειο του ελλειπτικού ίχνους με ακτίνα r_1 , όπως στο ΣΧΗΜΑ 8.3/1, με $h_1 = 191,864 \text{ km}$, $r_2 = 42164 \text{ km}$, $\theta_M = 160^\circ$, $I_{sp} = 285 \text{ s}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$.

Λύση: Η ακτίνα της αρχικής τροχιάς του Δ/Φ είναι:

$$r_1 = R_E + h_1 = 6378,136 + 191,864 \rightarrow r_1 = 6570 \text{ km}$$

και ο λόγος ακτίνων αρχικής προς τελική τροχιά είναι

.....
 Το ίχνος μετάβασης ξεκινάει από το περίγειο με r_1 , οπότε η εκκεντρότητά του υπολογίζεται από τη σχ.(8.3.15α) με (-) στον παρανομαστή:

Η εκκίνηση στο ελλειπτικό ίχνος μετάβασης απαιτεί ταχύτητα

$$V_{M1} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_A} - \frac{\mu_E}{a_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600,4}{6570} - \frac{398600,4}{28637,44}} \rightarrow V_{M1} = 10364,4 \text{ m/s}$$

οπότε ο αυτοφερόμενος πυραυλοκινητήρας του Δ/Φ πρέπει να αυξήσει την ταχύτητά του κατά ΔV_1 :

.....
 Η τελική γεωσύγχρονη τροχιά του Δ/Φ με $r_2 = r_{geo}$ απαιτεί την ταχύτητα

$$V_2 = V_{geo} = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_{geo}}} = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_2}} = \sqrt{\frac{398600,4}{42164}} \rightarrow V_A = 3074,67 \text{ m/s}$$

Η προσέγγιση του Δ/Φ στην τελική του τροχιά δεν είναι εφαπτομενική, αλλά υπο τη γωνία πτήσης γ_{M2} κατά τη σχ. (8.3.3):

$$\tan \gamma_{M2} = \frac{e_M \sin \theta_M}{1 + e_M \cos \theta_M} = \frac{0,77058 \cdot \sin 160^\circ}{1 + 0,77058 \cos 160^\circ} \rightarrow \tan \gamma_{M2} = 0,95528$$

$$\gamma_{M2} = \arctan(0,95528) \rightarrow \gamma_{M2} = 43,69^\circ$$

Η αλλαγή ταχύτητας από το ελλειπτικό ίχνος μετάβασης στη γεωσύγχρονη ταχύτητα της τελικής τροχιάς είναι κατά τη σχ.(8.3.9)

Η συνολική απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας για τη μεταφορά στη γεωσύγχρονη τροχιά με το μονοεφαπτομενικό ελλειπτικό ίχνος είναι

$$\Delta V_{tot} = 4699,2 \text{ m/s}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.3.2 Σχεδιασμός μετάβασης ενός διαστημοχήματος σε γεωσύγχρονη τροχιά με ελλειπτικό ή σπειροειδές ίχνος κίνησης και επιλογή προώθησης με στερεά καύσιμα ή με ηλεκτρομαγνητική ώθηση.

Κατά τον σχεδιασμό της μετάβασης ενός διαστημοχήματος από μεταβατική γήινη τροχιά ύψους 212,3 km στη γεωσύγχρονη τροχιά ακτίνας 42164,2 km εξετάζεται η επιλογή του προωθητικού συστήματος μεταξύ ενός πυραυλοκινητήρα στερεού καυσίμου με ειδική ώθηση 295 s και ενός με ηλεκτρομαγνητική ώθηση 1N και ειδική ώθηση προωθητικού 1900 s. Στην πρώτη περίπτωση η μετάβαση γίνεται με έλλειψη μεταφοράς του Hohmann, στη δεύτερη με κυκλική σπειροειδή τροχιά μεταφοράς, η οποία καλύπτει πρακτικά τη διαφορά ταχύτητας μεταξύ της μεταβατικής και γεωσύγχρονης τροχιάς. Η τελική μάζα του Δ/O στη γεωσύγχρονη τροχιά πρέπει και στις δύο περιπτώσεις να είναι 1183 kg. Με κριτήριο την εξοικονόμηση μάζας του Δ/O κατά την εκτόξευσή του να υπολογιστεί ποια από τις δύο περιπτώσεις είναι η προσφορότερη.

Δεδομένα: Ύψος αρχικής τροχιάς $h_A = 212,3 \text{ km}$, ακτίνα τελικής (γεωσύγχρονης) τροχιάς $r_T = 42164,2 \text{ km}$, τελική μάζα του Δ/O $M_T = 1183 \text{ kg}$, ειδική ώθηση του στερεού προωθητικού $I_{spH} = 295 \text{ s}$ και της ηλεκτρομαγνητικής ώθησης $F_t = 1N$, $I_{sp\Sigma} = 1900 \text{ s}$, $\mu_E = 398600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_E = 6378,135 \text{ km}$.

Λύση: Οι ταχύτητες του Δ/O στη μεταβατική και στη γεωσύγχρονη τροχιά είναι:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_1}} \quad V_{geo} = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_{geo}}}$$

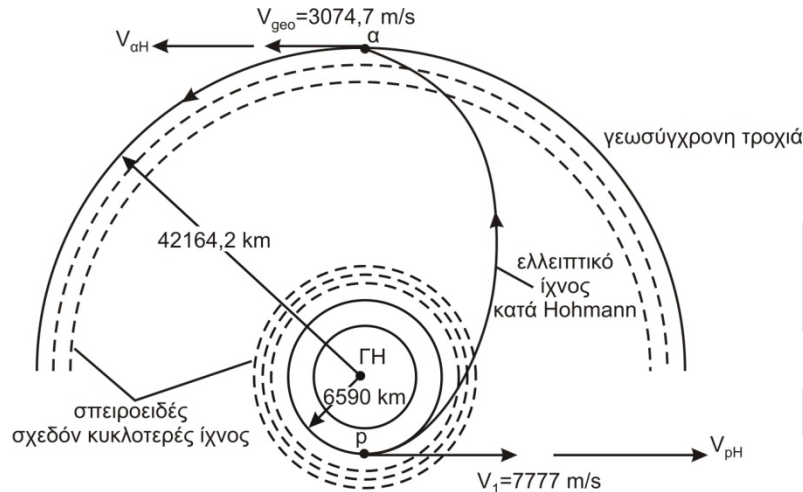
$$r_1 = R_E + h_1 = 6378,135 + 212,3 \rightarrow r_1 = 6590,435 \text{ km}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{398600,44}{6590,435}} \rightarrow V_1 = 7777 \text{ m/s} \rightarrow V_A = 7777 \text{ m/s}$$

$$V_{geo} = \sqrt{\frac{398600,44}{42164,2}} \rightarrow V_{geo} = 3074,7 \text{ m/s} \rightarrow V_T = 3074,7 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζοντας τη σπειροειδή μετάβαση προς τη γεωσύγχρονη τροχιά το Δ/Ο πρέπει να μειώσει βαθμιαία την ταχύτητά του με ανασχετική ώθηση του ηλεκτρομαγνητικού πυραυλοκινητήρα του συνολικά κατά: $\Delta V_{\Sigma} = 4702,3 \text{ m/s}$

Η μετάβαση του Δ/Ο μέσω ημιελλειπτικού ίχνους μπορεί να υπολογιστεί ως τροχιά του Hohmann προς μέγιστη εξοικονόμηση προωθητικού. Ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειπτικού ίχνους είναι κατά τη σχ.(8.1.4).....



Την αναγκαία ποσότητα προωθητικού για το ίχνος Hohmann υπολογίζουμε από την πυραυλική εξίσωση του Τσιολκόφσκυ, σχ.(8.1.11) στη μορφή της σχ.(8.1.12α)

Η διάρκεια της σπειροειδούς πτήσης είναι της τάξης των 2,5 μηνών, η οποία ένεκα της σημαντικής μείωσης της μάζας εκτόξευσης θα είναι προτιμητέα, όταν τα ηλεκτρομαγνητικά και παρόμοια συστήματα υψηλής ειδικής ώθησης ωριμάσουν τεχνολογικά προς βέβαιη εφαρμογή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.4.2Α Σχεδιασμός μετάβασης διαστημοχήματος υποστήριξης με δυνατότητα αυτόματης επισκευής γεωσύγχρονον Δ/Φ στη τροχιά του ύψους 35786 km.

Ένα διαστημοχρημα υποστήριξης με δυνατότητα αυτόματης επισκευής ευρισκόμενο σε χαμηλή περίγεια κυκλική τροχιά ύψους 174 km προορίζεται να συναντήσει ένα γεωσύγχρονο δορυφόρο προς επισκευή σε ύψος 35786 km. Η μάζα του κατά τη συνάντηση πρέπει να είναι 1050 kg και το προωθητικό του έχει ειδική ώθηση 288 s. Η γωνία φάσης μεταξύ των δύο Δ/Ο είναι 168°. Η ακτίνα της Γης λαμβάνεται 6378 km και η βαρυντική παράμετρος 398600,4 km³/s².

- (α) Πόσο χρόνο πρέπει να περιμένει το Δ/Ο-υποστήριξης πριν αρχίσει η διαδικασία συνάντησης;
- (β) Ποια χρονική στιγμή θα ολοκληρωθεί η συνάντηση;
- (γ) Ποια ποσότητα στερεού καυσίμου απαιτείται για την ολοκλήρωση του ελιγμού του ραντεβού;

Δεδομένα: $h_2 = 35786 \text{ km}$, $h_1 = 174 \text{ km}$, $\phi_i = 168^\circ$, $I_{sp} = 288 \text{ s}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_E = 6378 \text{ km}$.

Λύση: (α) Ο χρόνος αναμονής του Δ/Ο-υποστήριζέως πριν αρχίσει ο ελιγμός προσέγγισης δίνεται από τη σχ.(8.4.9)

$$\Delta t_{AN} = \frac{\pi - \omega_2 \Delta t_H - \phi_i + 2k\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

(β) Η χρονική στιγμή της συνάντησης των δύο Δ/Ο είναι ο χρόνος t_3 , ΣΧΗΜΑ 8.4/1, ο οποίος πρέπει να μετρηθεί από τη στιγμή που το Δ/Ο-υποστήριξης προγραμματίστηκε να αρχίσει την αντίστροφη μέτρηση, δηλ. από τη χρονική στιγμή t_0 :

(γ) Η έναυση του πυραυλοκινητήρα πρέπει να ξεκινήσει σε 17 min 27,38 s ώστε με στιγμιαία δράση να παράγει την απαραίτητη αύξηση ταχύτητας ΔV_1 , σχ.(8.4.1):

Η μάζα του καυσίμου M_K υπολογίζεται από τη σχ.(8.1.12α) με $M_2 = 1050$ kg και $I_{sp} = 288$ s:

$$M_K = M_2 \left(e^{\frac{\Delta V_1}{g_n I_{sp}}} - 1 \right) = 1050 \left(e^{\frac{2,46216 \cdot 10^3}{9,80665 \cdot 288}} - 1 \right) \rightarrow M_K = 1460,7 \text{ kg}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.4.2B Τροχιά μεταφοράς του Space Shuttle στο σημείο ραντεβού με διαστημόχημα προς επιδιόρθωση αυτού.

Διαστημόχημα υποστηρίξεως (π.χ. το διαστημικό "λεωφορείο" Space Shuttle) κινείται σε ύψος 136 km σε συνεπίπεδη κυκλική τροχιά με ένα διαστημόχημα, το οποίο παρουσιάζει βλάβη και διανύει επίσης κυκλική τροχιά σε ύψος 258 km. Το Space Shuttle βρίσκεται κατά 130° πίσω από το προς επιδιόρθωση όχημα. Απαιτείται η οργάνωση και ο προϋπολογισμός της διαδικασίας συναντήσεως και ειδικότερα:

- (α) Να καθορισθεί ο χρόνος πτήσεως της τροχιάς μεταφοράς στο σημείο του ραντεβού των δύο Δ/Ο.
- (β) Να ευρεθούν οι γωνιακές ταχύτητες των δύο Δ/Ο, η γωνία φάσης και η αρχική γωνία καθώς και ο χρόνος αναμονής του Δ/Ο υποστηρίξεως πριν από την εκκίνηση της διαδικασίας του ραντεβού.
- (γ) Ποιες ποσότητες στερεού καυσίμου ειδικής ώσης 275 s απαιτούνται για την ολοκλήρωση του ραντεβού;

Η μαθηματική προσομοίωση αυτής της διαδικασίας συναντήσεως γίνεται πανομοιότυπα με την προηγηθείσα περίπτωση της παραγράφου 8.5.2 με κάποιες ποσοτικές μόνο διαφορές και αφήνεται προς επαλήθευση στην επόμενη ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.5.3.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.5.3 Διόρθωση τροχιάς ένεκα αστοχίας της γωνιακής απόστασης από το Δ/Ο-στόχος

Εξετάζουμε το ενδεχόμενο, ότι στην διαστημική αποστολή της ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ 8.4.2B παρουσιάζεται αστοχία κατά την εκκίνηση των πυραυλοκινητήρων με αποτέλεσμα τη μερική αποτυχία του εγχειρήματος. Το Space Shuttle φθάνει στην τροχιά των 258 km, αλλά σε γωνιακή απόσταση των 38° μπροστά από το προς επιδιόρθωση Δ/Ο-στόχος.

- (α) Να καθορισθεί η γεωμετρία της τροχιάς αναμονής και ο χρόνος αναμονής.
- (β) Να υπολογιστεί το ΔV εισόδου στην τροχιά αναμονής και η απαιτούμενη μάζα του καυσίμου ειδικής ώσης 275 s.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.6.2A Απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας για εισαγωγή σε ισημερινή και πολική τροχιά από μεταβατική γήινη κυκλική τροχιά χαμηλού ύψους

Από το πεδίο εκτοξεύσεων Tyuratam (Baikonour, Καζακστάν) ευρισκόμενο σε γεωγραφικό πλάτος $45^\circ 54' N$ εκτοξεύεται πύραυλος διπλού ωφέλιμου φορτίου, δηλ. με δύο Δ/Ο, τα οποία καταλήγουν απευθείας σε μεταβατική γήινη κυκλική τροχιά ύψους 242,2 km με κλίση ίση με το γεωγραφικό πλάτος του ΠΕ. Μετά την απαραίτητη προπαρασκευή το ένα Δ/Ο εισάγεται σε ισημερινή τροχιά ίδιου μεγέθους και το δεύτερο Δ/Ο σε πολική τροχιά επίσης ίδιου μεγέθους. Γνωρίζοντας, ότι η ισημερινή και η πολική τροχιά

έχουν αντίστοιχα κλίση 0° και 90° , η γήινη ακτίνα είναι $6378,136 \text{ km}$ και η βαρυτική παράμετρος $398600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$, να υπολογιστούν:

(α) η απαίτηση σε αλλαγή ταχύτητας ΔV για την ισημερινή τροχιά και

(β) η ΔV για την πολική τροχιά

Δεδομένα: $h_A = 242,2 \text{ km}$, $L_{PE} = 45^\circ 54' N = 45,9^\circ$, $i_A = 45,9^\circ$, $i_T = 0^\circ$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση:(α) Η ακτίνα της αρχικής τροχιάς είναι:

$$r_A = R_E + h_A = 6378,136 + 242,2 \rightarrow r_A = 6620,336 \text{ km}$$

και η ταχύτητα του Δ/O

$$V_A = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_A}} = \sqrt{\frac{398600,44}{6620,336}} \rightarrow V_A = 7759,4 \text{ m/s}$$

Προκειται για μία απλή μεταβολή του τροχιακού επιπέδου κατά γωνία, σχ.(8.6.3):

Με τον τύπο, σχ.(8.6.5) υπολογίζουμε την απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας:

(β) Για την πολική τροχιά απαιτείται μεταβολή της κλίσης του επιπέδου τροχιάς κατά:

$$\Delta i = |i_T - i_A| = |90^\circ - 45,9^\circ| \rightarrow \alpha = 44,1^\circ$$

Με τον τύπο για την αλλαγή της ταχύτητας, σχ.(8.6.5), με στόχο την αλλαγή της κλίσης τροχιάς, έχουμε:

Παρατηρούμε, ότι η απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας $6051,2 \text{ m/s}$ για να πετύχουμε την ισημερινή ή την πολική τροχιά του Δ/O , δηλ. τη "στροφή" του τροχιακού του επιπέδου κατά $45,9^\circ$ ή $44,1^\circ$ αντίστοιχα είναι πολύ υψηλή, αφού είναι περίπου το 65% της απαιτούμενης ΔV για την εκτόξευσή του!.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.6.2.B Αναγκαία αλλαγή ταχύτητας ΔV για την αλλαγή τροχιάς

Δορυφόρος ευρισκόμενος σε γήινη ελλειπτική τροχιά κλίσης 30° με γωνία αναβιβάζοντος συνδέσμου και περιapsίδας 30° και με εκκεντρότητα $0,29$ και ύψος περιγείου $7466,864 \text{ km}$, πρόκειται να αυτοπροωθηθεί σε νέα τροχιά ίδιου μεγέθους αλλά κλίσης 15° στην τροχιακή θέση του με αληθή ανωμαλία 330° . Λαμβάνονται υπόψη: γήινη ακτίνα $6378,136 \text{ km}$ και βαρυτική παράμετρος $398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

(α) Να βρεθεί η αναγκαία αλλαγή ταχύτητας ΔV για την αλλαγή τροχιάς σ' αυτό το σημείο.

(β) Ποια αλλαγή τροχιακής θέσης του Δ/Φ είναι προσηγορότερη, δηλ. απαιτεί μικρότερη αλλαγή ταχύτητας, για την ίδια αλλαγή τροχιακού επιπέδου;

Δεδομένα:

$\omega = 30^\circ$ σημαίνει, ότι το περίγειο της δορυφορικής τροχιάς απέχει γωνιακή απόσταση 30° από τη γραμμή των συνδέσμων, $i_A = 30^\circ$, $i_T = 15^\circ$, $e = 0,29$, $h_p = 7466,867 \text{ km}$, $\theta = 330^\circ$ σημαίνει, ότι ο Δ/Φ ευρίσκεται ακριβώς στον αναβιβάζοντα σύνδεσμο (ΑΣ) της τροχιάς του, $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $\mu = \mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση:

(α) Η ακτίνα περιγείου είναι:

$$r_p = R_E + h_p = 6378,136 + 7466,864 \rightarrow r_p = 13845 \text{ km}$$

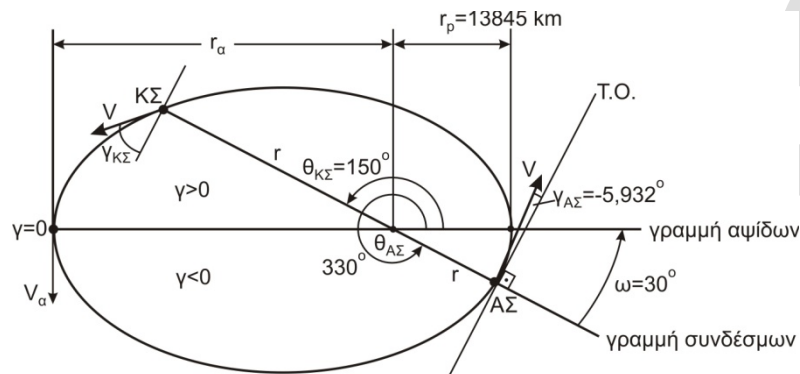
Ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς είναι σχ.(4.3.15):

.....
 Η τροχιακή ακτίνα του Δ/Φ στην παραπάνω θέση σύμφωνα με τη σχ.(4.2.11β) είναι:

.....
 Η τροχιακή ταχύτητα σ' αυτό το σημείο κατά τη σχ.(4.2.41) είναι:

.....
 Υπολογίζουμε τη γωνία πτήσης του Δ/Φ στη θέση $\theta = 330^\circ$, σχ.(4.2.19β), δηλ. στον ΑΣ, $\gamma_{ΑΣ}$:

.....
 Η αρνητική τιμή της γωνίας πτήσης υποδηλώνει, ότι ο Δ/Φ ευρίσκεται στο κάτω μέρος της τροχιάς κοντά στο περίγειο, βλ. σκαρίφημα.



Η απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας ΔV , εγκάρσια προς το τροχιακό επίπεδο, για να στραφεί η τροχιά του Δ/Φ κατά:

$$\Delta i = [i_T - i_A] = [15^\circ - 30^\circ] \rightarrow \Delta i = 15^\circ$$

υπολογιζόμενη από τη σχ.(8.6.6):

Αυτή η αλλαγή ταχύτητας απαιτείται, όταν η αλλαγή κλίσης της τροχιάς γίνει στον ΑΣ και είναι υψηλή αφού ευρίσκεται κοντά στο περίγειο, όπου η τροχιακή ταχύτητα είναι υψηλή.

(β) Εναλλακτικά η αλλαγή κλίσης της δορυφορικής τροχιάς μπορεί να γίνει στον καταβιβάζοντα σύνδεσμο ΚΣ, ο οποίος ευρίσκεται στη θέση αληθούς ανωμαλίας $\theta_{ΚΣ} = \theta_{ΑΣ} - 180^\circ = 330^\circ - 180^\circ = 150^\circ$, δηλ. του απογείου της τροχιάς, όπου παρατηρείται η χαμηλότερη τροχιακή ταχύτητα. Από την τροχιακή εξίσωση, όπως παραπάνω, έχουμε:

Η γωνία πτήσης $\gamma_{ΚΣ}$ είναι:

η απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας κατά τη σχ.(8.6.6) είναι:

.....
 Παρατηρούμε ότι η $\Delta V_{ΚΣ}$ είναι αρκετά μικρότερη από τη $\Delta V_{ΑΣ}$ ($923,5 < 1545 \text{ m/s!}$) και γι' αυτό η αλλαγή κλίσης στον καταβιβάζοντα σύνδεσμο της δορυφορικής τροχιάς είναι εξαιρετικά πρόσφορη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.6.3 Σχεδιασμός διαδικασίας μεταφοράς δορυφόρου στην επιθυμητή τροχιά από το "διαστημικό λεωφορείο" (Space Shuttle)

Το διαστημόχημα "διαστημικό λεωφορείο" (Space Shuttle) κινείται σε τροχιά αναμονής ύψους 280 km υπό κλίση (σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο) $28,5^\circ$ ως αποτέλεσμα της εκτόξευσής του από το

Ακρωτήριο Kennedy ευρισκόμενο στο γεωγραφικό πλάτος $28,5^\circ$. Σκοπός της αποστολής είναι να θέσει έναν τηλεπικοινωνιακό δορυφόρο σε γεωστατική τροχιά, δηλ σε κυκλική τροχιά με περίοδο ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης, δηλ. $86164,09 \text{ s}$, στο ισημερινό επίπεδο. Να ληφθούν υπόψη: ακτίνα Γης $6378,136 \text{ km}$, γήινη βαρυτική παράμετρος $398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Να σχεδιαστεί η διαδικασία μεταφοράς του δορυφόρου στην επιθυμητή τροχιά και να υπολογιστούν οι επιμέρους και η συνολική απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας.

Δεδομένα:

Ύψος χαμηλής γήινης τροχιάς $h_1 = 280 \text{ km}$ με αρχική κλίση $i_A = L_{PE} = 28,5^\circ$, περίοδος τροχιάς $P = 86164,09 \text{ s}$ με τελική κλίση $i_T = 0^\circ$ (ισημερινή τροχιά), $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση:

Το φυσικό μοντέλο της διαδικασίας εκτόξευσης του δορυφόρου καταstrώνεται και περιγράφεται στο ΣΧΗΜΑ Ε8.6.3.

Η ταχύτητα του διαστημοχήματος (και του δορυφόρου) στη χαμηλή κυκλική τροχιά αναμονής (ή "στάθμευσης") των 280 km είναι με $r_1 = R_E + h_1$:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600,4}{6378,136+280}} \rightarrow V_1 = 7737,4 \text{ m/s}$$

Η ακτίνα της γεωσύγχρονης τροχιάς υπολογίζεται από τις σχ.(4.3.4) και (4.3.6)

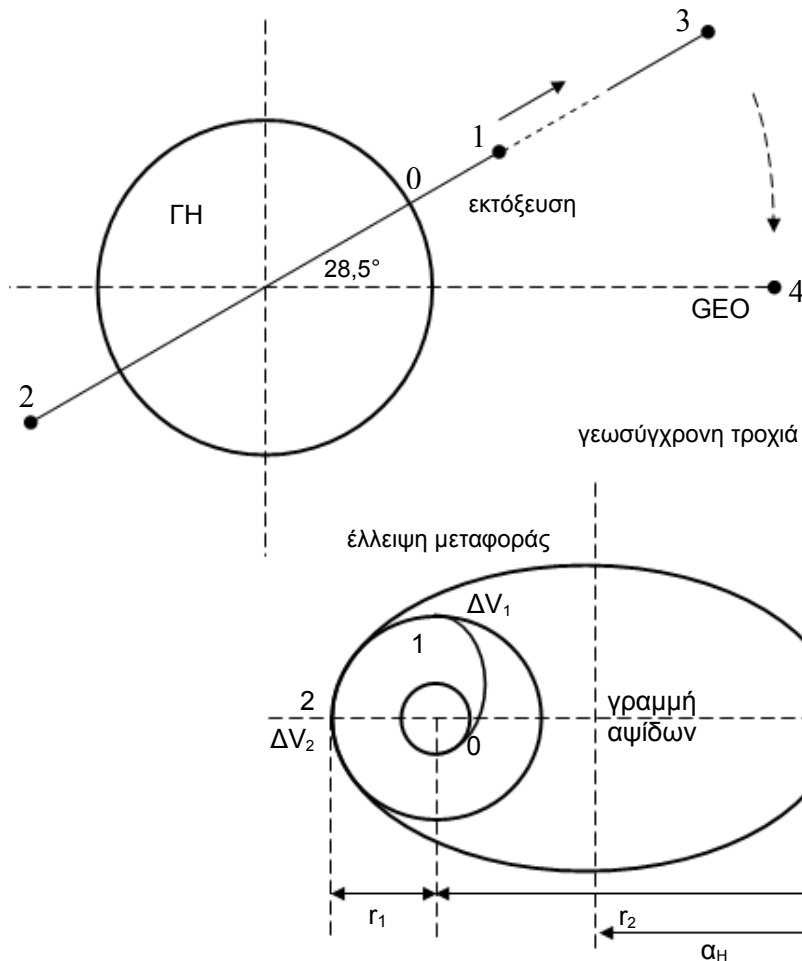
$$\alpha_H = \frac{r_1 + r_2}{2} \rightarrow \alpha_H = \frac{6658,135 + 42164,17}{2} = 24411,15 \text{ km}$$

Η ταχύτητα στο περίγειο της τροχιάς μεταφοράς:

Αύξηση ταχύτητας κατά ΔV_2 για να εισαχθεί το δορυφορικό σύστημα από την κυκλική τροχιά σε τροχιά μετάβασης: $\Delta V_2 = V_{pH} - V_2 = 10168,8 - 7737,4 = 2431,4 \text{ m/s}$

Η γραμμή των ασίδων πρέπει να είναι στο ισημερινό επίπεδο, ώστε το απόγειο να είναι ένα σημείο της γεωσύγχρονης τροχιάς. Γι' αυτό η αύξηση ταχύτητας ΔV_2 που απαιτείται για να αλλάξει τη μορφή της τροχιάς από κυκλική σε ελλειπτική πρέπει να λαμβάνει χώρα επί του ισημερινού επιπέδου. Η άνω βαθμίδα του πυραύλου του δορυφόρου συνήθως εκτελεί αυτή την ανάφλεξη στην πρώτη Ισημερινή διασταύρωση των δύο τροχιών. Να σημειωθεί ότι χρειάζονται δύο αναφλέξεις (η δεύτερη είναι για την αλλαγή επιπέδου τροχιάς), γι' αυτό ο πυραυλοκινητήρας πρέπει να έχει δυνατότητα επανεκκίνησης ή επανάφλεξης.

Η αλλαγή του επιπέδου τροχιάς απαιτείται για να περιστρέψει την έλλειψη μεταφοράς από κλίση των $28,5^\circ$ σε 0° . Η σχ.(8.6.6) δείχνει, ότι πετυχαίνουμε μέγιστη εξοικονόμηση ενέργειας, όταν η αλλαγή επιπέδου τροχιάς ολοκληρωθεί στο σημείο, όπου η ταχύτητα του δορυφόρου έχει την ελάχιστη τιμή της όλης αποστολής. Αυτή η ελάχιστη ταχύτητα εμφανίζεται στο απόγειο της έλλειψης μεταφοράς όπου η γωνία πτήσης είναι $\gamma = 0^\circ$:



ΣΧΗΜΑ Ε8.6.3 Το διαστημικό "λεωφορείο" (Space Shuttle) εκτοξεύεται στη θέση 0 και εισάγεται σε χαμηλή κυκλική τροχιά (1) με την πρόσθετη ταχύτητα ΔV_1 . Από την τροχιά αυτή εισάγει (2) με ΔV_2 τον δορυφόρο στην έλλειψη μεταφοράς τύπου Hohmann, ώστε να φθάσει στο απόγειό της (3), δηλ. στο γεωσύγχρονο ύψος των 42164,17 km. Εκεί με ΔV_3 αρχίζει η αλλαγή επιπέδου της τροχιάς προς το ισημερινό επίπεδο (4), μετά την ολοκλήρωση της οποίας ο δορυφόρος με αύξηση ταχύτητας ΔV_4 εισάγεται στην τελική κυκλική γεωσύγχρονη τροχιά.

Με την ανωτέρω μέθοδο υπολογισμού η συνολική μεταβολή ταχύτητας που απαιτείται για να τεθεί ο δορυφόρος σε γεωσύγχρονη τροχιά είναι συνολικά 12430 m/s και ειδικότερα:

- ΔV_1 για την εισαγωγή στην κυκλική τροχιά αναμονής ($\Delta V_1 = V_1$): 7737,4 m/s
- ΔV_2 για την εισαγωγή στην ελλειπτική τροχιά μεταφοράς : 2431,4 m/s
- ΔV_3 για την αλλαγή επιπέδου τροχιάς : 793,59 m/s
- ΔV_4 για την εισαγωγή στη γεωσύγχρονη τροχιά : 1462,68 m/s
- ΔV συνολικό από εκτόξευση στη γεωσύγχρονη τροχιά:

$$\Delta V_{totl} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = 12425,07 \text{ m/s}$$

- ΔV συνολικό μόνο για τις αλλαγές ταχύτητας:

Το απαιτούμενο συνολικό ΔV εξαρτάται ως έναν βαθμό από την επιλογή της αρχικής τροχιάς αναμονής. Αν π.χ. επιλεγεί τροχιά αναμονής 180 km το συνολικό ΔV θα ήταν ελαφρώς μεγαλύτερο: 12487 m/s. Όμως η επιλογή της αρχικής τροχιάς γίνεται σύμφωνα με τις δυνατότητες και του περιορισμούς του πυραυλικού συστήματος εκτόξευσης και λιγότερο από θεωρήσεις της μεταβολής ταχύτητας ΔV για την αλλαγή των τροχιών. Επίσης το ΔV_1 της εκτόξευσης πρέπει να επαυξηθεί κατά περίπου 18% ένεκα των απωλειών αντίστασης, πλοήγησης και βαρύτητας.

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του ΔV δεν είναι ο οικονομικότερος. Προσφορότερη είναι η συνδυασμένη αλλαγή τροχιάς που αναλύεται στην επόμενη παράγραφο 8.6.4.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.6.4 Εναλλακτικές επιλογές μεταφοράς δορυφόρων από κυκλική τροχιά αναμονής χαμηλού ύψους στη γεωσύγχρονη τροχιά.

Με τα δεδομένα της ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ 8.6.3 ας ερευνήσουμε ορισμένες εναλλακτικές επιλογές μεταφοράς δορυφόρων από την κυκλική τροχιά αναμονής χαμηλού ύψους στη γεωσύγχρονη τροχιά. Ξεκινάμε με την εφαρμογή της συνδυασμένης αλλαγής επιπέδου στο τελευταίο βήμα της ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ 8.6.3.

Λύση:

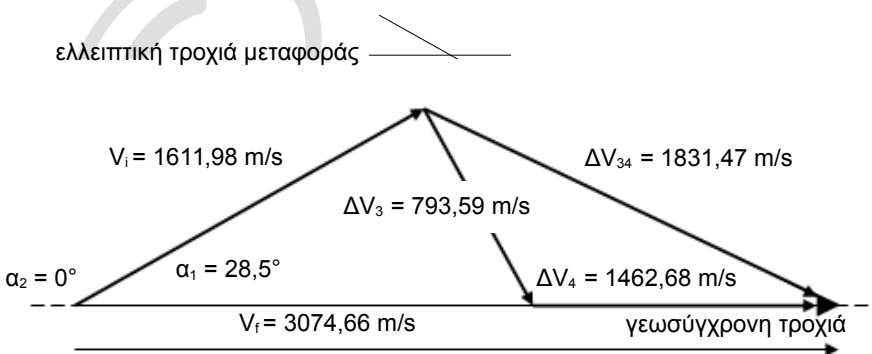
Το ΣΧΗΜΑ Ε8.6.4 επεξηγεί το τρόπο μεταφοράς της τροχιάς από την τροχιά Hohmann στη γεωσύγχρονη. Η νέα (συνδυασμένη) απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχ.(8.6.9)

$$\Delta V_{\text{totc}} = \Delta V_2 + \Delta V_{34} = 2431,4 + 1825,75 = 4257,15 \text{ m/s}$$

Η συνολική αλλαγή ταχύτητας του συνδυασμένου ελιγμού είναι μικρότερη κατά 430,5 m/s από το διπλό ελιγμό με αποτέλεσμα την εξοικονόμηση (μάζας) καυσίμου:

Η συνολική αλλαγή ταχύτητας του συνδυασμένου ελιγμού είναι μικρότερη κατά 430,5 m/s από το διπλό ελιγμό με αποτέλεσμα την εξοικονόμηση (μάζας) καυσίμου:

$$\Delta V_{\text{tot2}} - \Delta V_{\text{totc}} = 4687,67 - 4257,17 = 430,5 \text{ m/s}$$



$$\Delta V_{34} < (\Delta V_3 + \Delta V_4) \leftarrow \Delta V_{34} = \sqrt{V_i^2 + V_f^2 - 2 V_i V_f \cos \alpha}$$

$$\Delta V_{34} = 1825,75 \text{ m/s} < 2256,27 \text{ m/s}$$

ΣΧΗΜΑ Ε8.6.4 Η συνδυασμένη μεταβολή ταχύτητας, δηλ. η μεταφορά στην κυκλική γεωσύγχρονη τροχιά από την ελλειπτική, με μία αλλαγή ταχύτητας ΔV_{34} αντί των δύο ΔV_3 και ΔV_4 επιφέρει εξοικονόμηση ενέργειας που αντιστοιχεί σε 430,52 m/s με τα δεδομένα της ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ 8.6.3.

ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΕΛΙΓΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ
1. Αλλαγή κλίσης τροχιάς κατά α_1 με απλή αλλαγή επιπέδου. Κατόπιν μεταφορά Hohmann με δύο $\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V_H$.	$\Delta V_S = 3809,17 \text{ m/s}$ $\Delta V_H = 3894,08 \text{ m/s}$ $\Delta V_{\text{tot}} = 7703,25 \text{ m/s}$
2. Συνδυασμένη αλλαγή κλίσης στο περίγειο της τροχιάς μεταφοράς. Κατόπιν μεταφορά Hohmann με ΔV_2 .	$\Delta V_C = 4998,11 \text{ m/s}$ $\Delta V_2 = 1462,68 \text{ m/s}$ $\Delta V_{\text{tot}} = 6460,79 \text{ m/s}$
3. Μεταφορά σε τροχιά Hohmann με ΔV_1 και ΔV_2 . Κατόπιν κλίση κατά α_1 με απλή αλλαγή επιπέδου.	$\Delta V_H = 3894,08 \text{ m/s}$ $\Delta V_S = 1462,68 \text{ m/s}$ $\Delta V_{\text{tot}} = 5356,76 \text{ m/s}$
4. Αφορά σε τροχιά Hohmann με ΔV_1 . Κατόπιν συνδυασμένη αλλαγή επιπέδου κλίσης στο απόγειο της έλλειψης μεταφοράς.	$\Delta V_1 = 2431,4 \text{ m/s}$ $\Delta V_C = 1825,75 \text{ m/s}$ $\Delta V_{\text{tot}} = 4257,15 \text{ m/s}$

ΠΙΝΑΚΑΣ Ε8.6.4 Δυνατότητες ελιγμών ενός δορυφορικού συστήματος για τη μεταφορά δορυφόρου από τροχιά αναμονής 280 km με κλίση $\alpha_1 = 28,5^\circ$ σε γεωσύγχρονη τροχιά ύψους 35786 km με κλίση $\alpha_2 = 0^\circ$. Μεθοδική ανάλυση των δυνατοτήτων ελιγμών οδηγεί σε βελτιστοποίηση, ώστε η περίπτωση 4 να είναι η οικονομικότερη. Οι ταχύτητες στην αρχική κυκλική και στην τελική κυκλική τροχιά είναι 7737,4 m/s και 3074,66 m/s, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα της ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ 8.6.3.

Οι εναλλακτικές επιλογές ελιγμών εξετάζονται στον Πίνακα Ε8.6.4. Είναι τέσσερες, όπου ο τέταρτος είναι ο οικονομικότερος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.6.5Α Ελιγμός Διαστημοχήματος για τον αναπροσανατολισμό της πολικής τροχιάς του .

Διαστημόχημα σε πολική κυκλική τροχιά ύψους 130 km και μήκους αναβιβάζοντος συνδέσμου 60° πρέπει να αναπροσανατολίσει την τροχιά του σε μήκος αναβιβάζοντος συνδέσμου 25° .

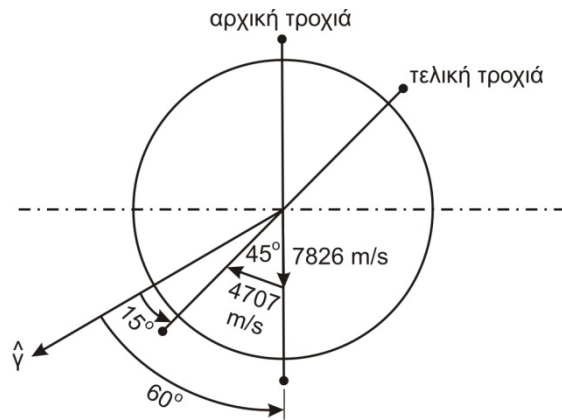
Με πόση αλλαγή ταχύτητας μπορεί το Δ/Ο να εκτελέσει αυτόν τον ελιγμό, όταν η γήινη ακτίνα και η βαρυτική παράμετρος είναι 6378,136 km και $398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, αντίστοιχα;

Δεδομένα:

Πολική τροχιά ($i = 90^\circ$) με ύψος $h = 130 \text{ km}$, $\Omega_A = 60^\circ$, $\Omega_T = 25^\circ$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση: Η τροχιακή ακτίνα είναι:

$$r = R_E + h = 6378,136 + 130 \text{ km} \rightarrow r = 6508,136 \text{ km}$$



Η ταχύτητα του Δ/Ο είναι, σχ.(4.3.4),.....

Η αλλαγή του μήκους αναβιβάζοντος συνδέσμου είναι.....

Η σχ.(8.6.13) δίνει την αναγκαία αύξηση ταχύτητας γι' αυτό τον αναπροσανατολισμό της τροχιάς του Δ/Ο: $\Delta V_{\Omega} = 4706,65 \text{ m/s}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.6.5B Αλλαγή προσανατολισμού τροχιάς δορυφόρου γύρω από την Αφροδίτη.

Ένα Δ/Ο σε δορυφορική κυκλική τροχιά με κλίση 53° και ύψος 1050 km γύρω από τον πλανήτη Αφροδίτη πρέπει να αλλάξει προσανατολισμό τροχιάς μεταβάλλοντας τη γωνία της γραμμής των συνδέσμων σε σχέση με τη γραμμή των ισημεριών κατά 48° . Να υπολογιστούν

(α) η αναγκαία αλλαγή ταχύτητας

(β) το σημείο εφαρμογής της αλλαγής ταχύτητας.

Να ληφθούν ακτίνα και βαρυτική παράμετρος της Αφροδίτης 6052 km και $325700 \text{ km}^3/\text{s}^2$ αντίστοιχα.

Δεδομένα: $i_A = i_T = 53^\circ$, $h_v = 1050 \text{ km}$, $\Delta\Omega = 48^\circ$, $R_v = 6052 \text{ km}$, $\mu_v = 325700 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση: (α) Η ακτίνα της τροχιάς του Δ/Φ είναι

$$r = R_v + h_v = 6052 + 1050 \rightarrow r = 7102 \text{ km}$$

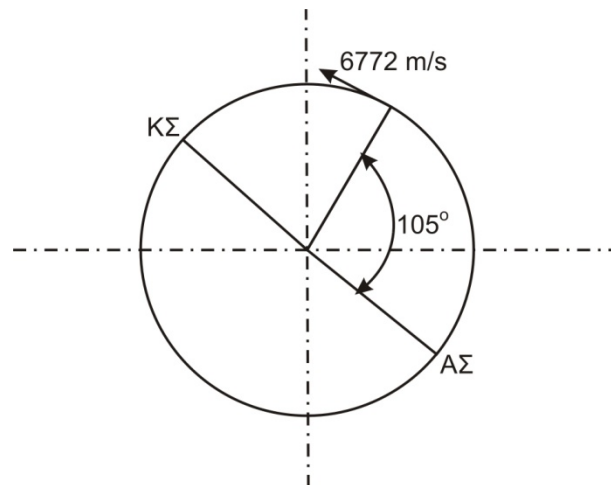
Η τροχιακή ταχύτητα είναι

$$V_A = \sqrt{\frac{\mu_v}{r}} = \sqrt{\frac{325700}{7102}} \Rightarrow V_A = 6772 \text{ m/s}$$

Η ΔV υπολογίζεται από τη σχ.(8.6.15) με τη βοηθητική γωνία α_{Ω} από τη σχ.(8.6.16α):

(β) Το σημείο της αλλαγής ταχύτητας και αρχής του ελιγμού (σημείο έναυσης του πυραυλοκινητήρα) ορίζει η αρχική γωνία πλάτους u_A από τη σχ.(8.6.18), η οποία ορίζει τη θέση του Δ/Φ επάνω στην τροχιά του:.....

Το αποτέλεσμα αυτό ορίζει, ότι το Δ/Ο ευρίσκεται σε 105° γωνιακή απόσταση από τη γραμμή των



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8.7.2 Ίχνος προσπεράσεως υπερβολικής μορφής με σκοπό τη συνάντηση δύο Διαστημοχημάτων.

Τα διαστημοχήματα m_A και m_B στις θέσεις 1 και 2 του ΣΧΗΜΑΤΟΣ Ε8.7.2 κινούνται σε κυκλική τροχιά ύψους 12760 km, ενώ το m_A έπεται του m_B κατά 80° . Το Δ/Ο m_A από τη θέση 1 πρέπει να προσπεράσει το m_B με σκοπό να το συναντήσει στο σημείο 3. Κατά την εκκίνηση του ελιγμού το σημείο 3 ευρίσκεται 40° μπροστά από το σημείο 2. Να ληφθούν ακτίνα Γης 6378,136 km και γήϊνη βαρυτική παράμετρος $398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

- (α) Να ευρεθεί η απαιτούμενη αλλαγή ταχύτητας εφαρμόζοντας ίχνος προσπεράσεως υπερβολικής μορφής.
(β) Να σχεδιαστούν σε κλίμακα τα τρίγωνα ταχυτήτων στα σημεία εκκίνησης και συνάντησης.

Δεδομένα: Μέθοδος παραγράφου 8.7.2, $\varphi_{12} = 80^\circ$, $\varphi_{23} = 40^\circ$, $h_c = 12760 \text{ km}$, $R_E = 6378,136 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, θέσεις των Δ/Ο m_A και m_B όπως στο ΣΧΗΜΑ Ε8.7.2.

Λύση: (α) Η ακτίνα της κοινής κυκλικής τροχιάς των δύο Δ/Ο είναι:

$$r_c = R_E + h_c = 6378,136 + 12760 \rightarrow r_c = 19138,136 \text{ km}$$

Ο χρόνος πτήσης t_{13A} του m_A στο τόξο του υπερβολικού ίχνους προσπεράσεως ¹³ πρέπει να είναι ίσος με το χρόνο t_{23B} του m_B στο κυκλικό τόξο ²³. Εφαρμόζουμε τη σχ.(8.7.2α):

Να υπολογιστεί η απαιτούμενη συνολικά μεταβολή της ταχύτητας.

Δεδομένα: Γεωσύγχρονη τροχιά με περίοδο ίση με τη γήϊνη., $P_{geo} = 86164,09 \text{ s} = P_E$, το Δ/Ο προηγείται της κανονικής του θέσης $\delta\phi = 2,2^\circ$, $R_E = 6378,135 \text{ km}$, $\mu_E = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Λύση: Η διάρκεια πτήσης του Δ/Ο στην ελλειπτική τροχιά επανατοποθέτησης σύμφωνα με τη σχ. (8.7.10) είναι

$$P = P_{geo} + \delta P = P_{geo} + \frac{\delta\phi}{2\pi} P_{geo} = P_{geo} \left(1 + \frac{\delta\phi}{2\pi}\right) = P_{geo} + \frac{\delta\phi}{2\pi} P_{geo}$$

.....
Η απαιτούμενη ταχύτητα στο περίγειο της ελλειπτικής τροχιάς επαναφοράς υπολογίζεται από τη σχ. (8.7.14α) με μεγάλο ημιάξονα κατά τη σχ. (8.7.11) και r_{geo} από τη σχ. (8.7.13β):

.....
Απαιτείται λοιπόν αύξηση ταχύτητας για την είσοδο στην τροχιά επανατοποθέτησης κατά

$$\Delta V_I = V_p - V_{geo} = 3080,89 - 3074,66 = 6,23 \text{ m/s}$$

και το Δ/Ο εισάγεται στην ελλειπτική τροχιά.

.....
Αξίζει να σημειωθεί, ότι η επανατοποθέτηση κατά τη μικρή γωνία των $2,2^\circ$ αντιστοιχεί σε μία αρκετά μεγάλη διόρθωση σε μήκος τόξου

$$\text{Μήκος τόξου } (\delta\phi) = \frac{\delta\phi}{360^\circ} 2\pi r_{geo} = \frac{2,2^\circ}{360} \cdot 2\pi \cdot \underset{\text{km}}{r_{geo}} = 42164,17 = 1619 \text{ km!}$$
